

コンパクト Lie 群

<https://soccusus.com>

2026 年 8 月 15 日

概要

コンパクト Lie 群（あるいはより一般に、コンパクトな Lie 代数をもつ Lie 群）の構造論および表現論を解説する。構造論については、コンパクト Lie 代数や、極大トーラス（あるいはより一般に、Cartan 部分群）による位相的性質の記述について解説する。表現論については、最高ウェイト理論を解説する。

目次

記号と用語	2
1 コンパクト Lie 代数	2
1.1 コンパクト Lie 代数	2
1.2 コンパクト Lie 代数の Cartan 部分代数の共役性	4
1.3 Chevalley 系	5
1.4 Chevalley 系に伴うコンパクト実形	7
1.5 コンパクト実形の存在と共役性	9
1.6 古典型コンパクト単純 Lie 代数	12
1.7 コンパクト単純 Lie 代数の分類	13
2 極大トーラス	14
2.1 連結可換 Lie 群	14
2.2 Cartan 部分群	15
2.3 極大トーラスの性質	16
2.4 ルート格子と整ベクトルのなす加法群	18
2.5 加法群 $X(T)$	19
2.6 Weyl 群	21
3 コンパクト Lie 群の位相的性質	23
3.1 Weyl の定理	23
3.2 Cartan 部分群の性質	25
3.3 部分群と商群の Cartan 部分群	26
3.4 Cartan 部分群と準同型	27
3.5 基本群と中心	28

4	コンパクト Lie 群の表現	30
4.1	ウェイト	30
4.2	最高ウェイト表現	31
4.3	最高ウェイト理論	31
	参考文献	32

記号と用語

- ルート系に関する記号と用語は、「ルート系」による。
- Lie 代数に関する記号と用語は、「Lie 代数」および「分裂簡約 Lie 代数」による。さらに、分裂簡約 Lie 代数のルート α に対して、その双対ルートを H_α と書く。
- 位相群 G の主連結成分（単位元を含む連結成分）を、 G_0 と書く。
- Lie 群 G の Lie 代数を、 $\text{Lie}(G)$ と書く。Lie 群の準同型 $f: G \rightarrow H$ が誘導する Lie 代数の準同型を、 $\text{Lie}(f): \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ と書く。Lie (f) が Lie 代数の準同型 ϕ に等しいとき、 f は ϕ の持ち上げであるという。

1 コンパクト Lie 代数

1.1 コンパクト Lie 代数

定義 1.1 (コンパクト Lie 代数) 有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**コンパクト** (compact) であるとは、あるコンパクト Lie 群 G の Lie 代数に同型であることをいう。

命題 1.2 有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して、次の条件は同値である。

- $\mathfrak{g}$ はコンパクトである。
- $\text{Int}(\mathfrak{g})$ はコンパクトである。
- $\mathfrak{g}$ 上の不変な内積（すなわち、 $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle -, - \rangle$ であって、任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して $\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle$ を満たすもの）が存在する。
- $\mathfrak{g}$ は簡約であり、 $\text{ad}(\mathfrak{g})$ の任意の元は半単純でその複素固有値はすべて純虚数である。
- $\mathfrak{g}$ は簡約であり、その Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ は負値である。

証明 (a) $\implies$ (b) $\mathfrak{g}$ がコンパクト Lie 群 G の Lie 代数であるとする。このとき、 $\text{Ad}(G) \subseteq GL(\mathfrak{g})$ は $\text{ad}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつ $GL(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 群だから、 $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{Ad}(G)_0$ である。 G はコンパクトだから、 $\text{Int}(\mathfrak{g})$ もコンパクトである。

(b) $\implies$ (c) $\text{Int}(\mathfrak{g})$ がコンパクトであるとする、 $\mathfrak{g}$ 上には $\text{Int}(\mathfrak{g})$ 不変な内積が存在し、これは $\mathfrak{g}$ 上の不変な内積である。

(c) $\implies$ (d) $\mathfrak{g}$ 上に不変な内積が存在するとして、それを一つ固定して $\mathfrak{g}$ を内積空間とみなす。すると、任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して、 $\text{ad}(x)$ は歪自己随伴だから、半単純かつその複素固有値はすべて純虚数である。また、 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対してその直交補空間 $\mathfrak{a}^\perp$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルとなるから、 $\mathfrak{g}$ は簡約である。

(d) $\implies$ (e) 条件 (d) が成り立つとする。任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して、仮定より $B_{\mathfrak{g}}(x, x) = \text{tr}(\text{ad}(x)^2) \leq 0$ だ

から, $B_{\mathfrak{g}}$ は負値である. よって, 条件 (e) が成り立つ.

(e) $\implies$ (a) 条件 (e) が成り立つとする. $\mathfrak{g}$ は簡約だから, 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ に直和分解される (参照). $\mathfrak{z}$ は適当なトーラス T の Lie 代数に同型である. 一方で, $\mathfrak{g}'$ は $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ の Lie 代数に同型であり, $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ は $GL(\mathfrak{g}')$ の閉部分群であって Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}'} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}'}$ を不変にする. 半単純性に関する Cartan の判定法と仮定より $B_{\mathfrak{g}'}$ は非退化負値だから, $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ はコンパクトである. よって, $\mathfrak{g}$ はコンパクト Lie 群 $\text{Aut}(\mathfrak{g}') \times T$ の Lie 代数に同型である. $\square$

系 1.3 (1) コンパクト Lie 代数の部分 Lie 代数は, コンパクトである.

(2) $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を有限次元実 Lie 代数の有限族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. このとき, すべての $\mathfrak{g}_i$ がコンパクトであること, $\mathfrak{g}$ がコンパクトであることは同値である.

証明 (1) 不変な内積の部分 Lie 代数への制限はまた不変な内積だから, 主張は, 命題 1.2 の (a) $\iff$ (c) から従う.

(2) (1) より, $\mathfrak{g}$ がコンパクトならば, すべての $\mathfrak{g}_i$ もコンパクトである. また, 各 $\mathfrak{g}_i$ がコンパクト Lie 群 G_i の Lie 代数に同型ならば, $\mathfrak{g}$ はコンパクト Lie 群 $G = \prod_{i \in I} G_i$ の Lie 代数に同型である. よって, すべての $\mathfrak{g}_i$ がコンパクトならば, $\mathfrak{g}$ もコンパクトである. $\square$

系 1.4 有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ はコンパクトである.
- (b) $\mathfrak{g}$ は簡約であり, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ はコンパクトである.

証明 コンパクト Lie 代数は簡約だから (命題 1.2), はじめから $\mathfrak{g}$ は簡約であるとしてよい. このとき, Lie 代数としての直和分解 $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ が成り立つ (参照). Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は可換だから, コンパクトである. よって, 主張は, 系 1.3 (2) から従う. $\square$

系 1.5 有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ はコンパクトかつ半単純である.
- (b) Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ は非退化負値である.

証明 半単純性に関する Cartan の判定法と命題 1.2 の (a) $\iff$ (e) から従う. $\square$

系 1.6 コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, その Cartan 部分代数と極大可換部分空間とは同じものである. 特に, $\mathfrak{g}$ のすべての Cartan 部分代数の合併は, $\mathfrak{g}$ 全体に等しい.

証明 一般に, 標数 0 の可換体上の簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ が Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ において極大可換であり, かつ $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が半単純であることである (参照). よって, 前半の主張は, コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が簡約であり, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元が半単純であること (命題 1.2) から従う.

任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対してそれを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間が存在するから, 前半の主張より, $\mathfrak{g}$ のすべての Cartan 部分代数の合併は $\mathfrak{g}$ 全体となる. $\square$

系 1.7 $\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数とし, $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とする. このとき, 任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して, $\alpha(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}$ である.

証明 任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{C})})$ と $h \in \mathfrak{t}$ に対して, $\alpha(h)$ は $\text{ad}(h)$ の複素固有値だから, 命題 1.2 より $\alpha(h)$ は純虚数である. $\square$

Δ を有限次元複素ベクトル空間 V 上のルート系とすると, $\text{span}_{\mathbb{R}} \Delta$ と $\text{span}_{\mathbb{R}} \Delta^\vee$ はそれぞれ V と V^* の実形である (参照). これらをそれぞれ, **ルート系 Δ が定める V と V^* の実形** という. ルート系が定める V と V^* の実形は, 互いに他に対応するものである^{*1}.

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を複素分裂半単純 Lie 代数とすると, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ と $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形は, それぞれ $\text{span}_{\mathbb{R}} \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ と $\text{span}_{\mathbb{R}} \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}$ である.

系 1.8 $\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 代数, $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とし, ルート系が定める $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く. このとき, $\mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_0$ である.

証明 系 1.7 より, $\mathfrak{t} \subseteq i\mathfrak{h}_0$ である. $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{h}_0$ はともに $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ の実形だから, $\mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_0$ が成り立つ. $\square$

1.2 コンパクト Lie 代数の Cartan 部分代数の共役性

補題 1.9 $\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数とし, $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とする. このとき, ある $h \in \mathfrak{t}$ が存在して, $\mathfrak{t} = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h)$ と書ける.

証明 系 1.7 より, 各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して, $i\alpha|_{\mathfrak{t}}$ は $\mathfrak{t}$ 上の 0 でない実線型形式である. ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ は有限だから, $h \in \mathfrak{t}$ を任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して $\alpha(h) \neq 0$ を満たすようにとれる. h のとり方より $\text{Ker}(\text{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h)) = \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ だから, $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h) = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}$ となる. $\square$

定理 1.10 (コンパクト Lie 代数の Cartan 部分代数の存在と共役性) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は, $\text{Int}(\mathfrak{g})$ の下の共役を除いて一意な Cartan 部分代数をもつ.

証明 存在 系 1.6 から従う.

共役性 $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}'$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とする. 補題 1.9 より, ある $h \in \mathfrak{t}$ が存在して $\mathfrak{t} = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h)$ と書け, ある $h' \in \mathfrak{t}'$ が存在して $\mathfrak{t}' = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h')$ と書ける. $\mathfrak{g}$ 上の不変な内積 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する (命題 1.2). $\text{Int}(\mathfrak{g})$ はコンパクトだから (命題 1.2), $\langle \phi(h), h' \rangle$ を最大にする $\phi \in \text{Int}(\mathfrak{g})$ がとれる. この ϕ について, 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle e^{t \text{ad}(x)} \phi(h), h' \rangle = \langle [x, \phi(h)], h' \rangle = \langle x, [\phi(h), h'] \rangle$$

だから, $[\phi(h), h'] = 0$ である. すなわち, $\phi(h) \in \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h') = \mathfrak{t}'$ である. $\mathfrak{t}'$ は可換だから

$$\mathfrak{t}' \subseteq \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\phi(h)) = \phi(\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h)) = \phi(\mathfrak{t})$$

となるが, $\phi(\mathfrak{t})$ と $\mathfrak{t}'$ はともに $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数だから, $\mathfrak{t}' = \phi(\mathfrak{t})$ が成り立つ. よって, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は, $\text{Int}(\mathfrak{g})$ の下の共役を除いて一意である. $\square$

注意 1.11 Lie 群 G がコンパクトな Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をもつとする. このとき, $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{Ad}(G)_0$ だから, 定理 1.10 より特に, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は, $\text{Ad}(G)$ の下の共役を除いて一意である.

^{*1} 複素ベクトル空間 V の実形 $V_{\mathbb{R}}$ に対して, $\{\phi \in V^* \mid \phi(V_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathbb{R}\}$ は V^* の実形であり, これを $V_{\mathbb{R}}$ に対応する V^* の実形という. $V_{\mathbb{R}}$ に対応する V^* の実形は, 実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ の双対空間と同一視できる.

1.3 Chevalley 系

定義 1.12 (Chevalley 系) 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する **Chevalley 系** (Chevalley system) とは, $\mathfrak{g}$ の元の族 $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ であって, 次の条件を満たすものをいう.

- (C1) 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ である.
- (C2) 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, $(H_\alpha, X_\alpha, -X_{-\alpha})$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三対である.
- (C3) 線型写像 $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を

$$\psi|_{\mathfrak{h}} = -\text{id}_{\mathfrak{h}}, \quad \psi(X_\alpha) = X_{-\alpha} \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$$

によって定めると, ψ は $\mathfrak{g}$ の自己同型である (このとき, より強く, ψ は $\mathfrak{g}$ 上の対合となる).

このとき, (C3) によって定まる ψ を, **Chevalley 系** $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ が定める対合という.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると, 分裂半単純 Lie 代数 $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ に対する Chevalley 系を, 単に $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する Chevalley 系という.

定理 1.13 (Chevalley 系の存在) 標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, それに対する Chevalley 系が存在する.*2

証明 一般性を失わず, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数であると仮定する. ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底 Π を一つ固定して, 各正ルート α に対して, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $(H_\alpha, X_\alpha, -X_{-\alpha})$ が $\mathfrak{sl}_2$ 三対となるようにとる (参照). $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ は条件 (C1) と (C2) を満たす. 以下, 各 X_α をスカラー倍だけ調整することで, Chevalley 系を構成する.

同型定理より, $\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ であって

$$\psi|_{\mathfrak{h}} = -\text{id}_{\mathfrak{h}}, \quad \psi(X_\alpha) = X_{-\alpha} \quad (\alpha \in \Pi)$$

を満たすものが (一意に) 存在する. $\psi|_{\mathfrak{h}} = -\text{id}_{\mathfrak{h}}$ より各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\psi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ だから,

$$\psi(X_\alpha) = c(\alpha)X_{-\alpha} \quad (c(\alpha) \in \mathbb{K}^\times)$$

と置ける. 任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して,

$$\begin{aligned} [\psi(X_\alpha), \psi(X_{-\alpha})] &= [c(\alpha)X_{-\alpha}, c(-\alpha)X_\alpha] = c(\alpha)c(-\alpha)H_\alpha, \\ \psi([X_\alpha, X_{-\alpha}]) &= -\psi(H_\alpha) = H_\alpha \end{aligned}$$

であり, これらは等しいから, $c(\alpha)c(-\alpha) = 1$ である. そこで, 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $d(\alpha) \in \mathbb{K}^\times$ をとり, 任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $d(\alpha)^{-2} = c(\alpha)$ かつ $d(\alpha)d(-\alpha) = 1$ を満たすようにできる (係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であることを用いた). $X'_\alpha = d(\alpha)X_\alpha$ と置くと, $(H_\alpha, X'_\alpha, -X'_{-\alpha})$ も $\mathfrak{sl}_2$ 三対であり,

$$\psi(X'_\alpha) = d(\alpha)\psi(X_\alpha) = d(\alpha)c(\alpha)X_{-\alpha} = d(\alpha)c(\alpha)d(-\alpha)^{-1}X'_{-\alpha} = X'_{-\alpha}$$

が成り立つ. よって, $(X'_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ は Chevalley 系である. □

*2 この主張は, 一般の標数 0 の (代数閉とは限らない) 可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数に対しても, 同様に成り立つ. 一般の場合の証明については, Bourbaki [1, §VIII.4.4, Corollaire du Proposition 5] を参照のこと.

注意 1.14 分裂簡約 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する Chevalley 系は、一般には、 $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の下の共役を除いても一意ではない。実際、 $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ を Chevalley 系とすると、写像 $\epsilon_\alpha: \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rightarrow \{\pm 1\}$ であって任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\epsilon_{-\alpha} = \epsilon_\alpha$ を満たすものに対して、 $(\epsilon_\alpha X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ も Chevalley 系となる。

補題 1.15 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}^*$ 上の $\mathbf{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する (参照)。各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ とする。 $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta} \quad (N_{\alpha, \beta} \in \mathbb{K}^\times)$$

と置く ($[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha + \beta}$ (参照) より $N_{\alpha, \beta} \neq 0$ である)。

- (1) 任意の $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、 $N_{\beta, \alpha} = -N_{\alpha, \beta}$ である。
- (2) 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ に対して、

$$\frac{N_{\alpha, \beta}}{\langle \gamma, \gamma \rangle} = \frac{N_{\beta, \gamma}}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{N_{\gamma, \alpha}}{\langle \beta, \beta \rangle}$$

である。

証明 (1) $N_{\beta, \alpha} X_{\alpha + \beta} = [X_\beta, X_\alpha] = -[X_\alpha, X_\beta] = -N_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$ だから、 $N_{\beta, \alpha} = -N_{\alpha, \beta}$ である。

(2) Jacobi の恒等式より、

$$\begin{aligned} 0 &= [[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [[X_\beta, X_\gamma], X_\alpha] + [[X_\gamma, X_\alpha], X_\beta] \\ &= N_{\alpha, \beta} [X_{-\gamma}, X_\gamma] + N_{\beta, \gamma} [X_{-\alpha}, X_\alpha] + N_{\gamma, \alpha} [X_{-\beta}, X_\beta] \\ &= N_{\alpha, \beta} H_\gamma + N_{\beta, \gamma} H_\alpha + N_{\gamma, \alpha} H_\beta \end{aligned}$$

である。 $\mathbf{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ が定める線型同型 $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$ によって H_α は $2\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$ に対応し (参照)、 β と γ についても同様だから、上式より

$$0 = \frac{N_{\alpha, \beta}}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \gamma + \frac{N_{\beta, \gamma}}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha + \frac{N_{\gamma, \alpha}}{\langle \beta, \beta \rangle} \beta$$

である。 $\gamma = -\alpha - \beta$ であり、 α と β は線型独立だから、上式から主張の等式を得る。 $\square$

補題 1.16 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする。各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ として、係数 $N_{\alpha, \beta}$ を補題 1.15 のとおりに定める。このとき、任意の $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = (q + 1)^2$$

である。ここで、 p と q は、 $\{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ を満たす 0 以上の整数である (参照)。

証明 $\mathfrak{h}^*$ 上の $\mathbf{W}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する (参照)。以下では、 $\text{ad}(X_{-\alpha}) \text{ad}(X_\alpha) X_\beta$ を 2 通りの方法で計算する。まず、定義より

$$\text{ad}(X_{-\alpha}) \text{ad}(X_\alpha) X_\beta = N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha + \beta} X_\beta$$

であり、補題 1.15 より

$$N_{-\alpha, \alpha + \beta} = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} N_{-\beta, -\alpha} = -\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} N_{-\alpha, -\beta}$$

だから,

$$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})\mathrm{ad}(X_{\alpha})X_{\beta} = -\frac{\langle\beta, \beta\rangle}{\langle\alpha + \beta, \alpha + \beta\rangle}N_{\alpha, \beta}N_{-\alpha, -\beta}X_{\beta} \quad (*)$$

である. 次に, $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_{\alpha}, X_{\alpha}, -X_{-\alpha})$ と随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす. すると, $\bigoplus_{j=-q}^p \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ は $\mathfrak{g}$ の $p+q+1$ 次元既約部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群であり, 各 $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ はそのウェイト $-(p-q)+2j$ のウェイト空間である (証明を参照). したがって, 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の構造より,

$$\mathrm{ad}(X_{-\alpha})\mathrm{ad}(X_{\alpha})X_{\beta} = -p(q+1)X_{\beta} \quad (**)$$

である. $(*)$ と $(**)$ を比較して, $\langle\alpha + \beta, \alpha + \beta\rangle/\langle\beta, \beta\rangle = (q+1)/p$ (参照) を用いれば,

$$N_{\alpha, \beta}N_{-\alpha, -\beta} = \frac{\langle\alpha + \beta, \alpha + \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle}p(q+1) = (q+1)^2$$

を得る. □

命題 1.17 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. $(X_{\alpha})_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する Chevalley 系とし, 係数 $N_{\alpha, \beta}$ を補題 1.15 のとおりに定める. このとき, 任意の $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して,

$$N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta} \in \{\pm(q+1)\}$$

が成り立つ. ここで, p と q は, $\{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ を満たす 0 以上の整数である (参照).

証明 一般性を失わず, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数であると仮定する. Chevalley 系 $(X_{\alpha})_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}$ が定める対合を ψ と書く. 任意の $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して,

$$\begin{aligned} [\psi(X_{\alpha}), \psi(X_{\beta})] &= [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = N_{-\alpha, -\beta}X_{-\alpha-\beta}, \\ \psi([X_{\alpha}, X_{\beta}]) &= \psi(N_{\alpha, \beta}X_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha, \beta}X_{-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

であり, これらは等しいから, $N_{-\alpha, -\beta} = N_{\alpha, \beta}$ である. $N_{\alpha, \beta}N_{-\alpha, -\beta} = (q+1)^2$ であること (補題 1.16) と合わせて, $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta} \in \{\pm(q+1)\}$ を得る. □

1.4 Chevalley 系に伴うコンパクト実形

補題 1.18 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を複素分裂半単純 Lie 代数とし, ルート系が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く.

(1) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Killing 形式の制限 $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}|_{\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0}$ は, 非退化正値対称双線型形式である.

さらに, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ とし, $X_{\alpha} \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}$ と $Y_{\alpha} \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\alpha}$ を $(H_{\alpha}, X_{\alpha}, Y_{\alpha})$ が $\mathfrak{sl}_2$ 三対となるようにとる (参照).

(2) $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha}, X_{\alpha}) = 0$.

(3) $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha}, Y_{\alpha}) > 0$.

証明 (1) $h \in \mathfrak{h}_0 \setminus \{0\}$ とすると, 任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して $\alpha(h) \in \mathbb{R}$ であり, すべての $\alpha(h)$ が 0 となることはない. ルート空間分解 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}$ が成立し, 各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}$ は 1 次元で

あり (参照), $\text{ad}(h)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}$ に $\alpha(h)$ 倍で作用するから,

$$B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(h, h) = \text{tr}(\text{ad}(h)^2) = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \alpha(h)^2 > 0$$

である. よって, $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}|_{\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0}$ は非退化正値対称双線型形式である.

- (2) Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ は不変だから, 主張は分裂簡約 Lie 代数の一般論 (参照) から従う.
- (3) Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ の不変性と (1) より,

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha}, Y_{\alpha}) &= \frac{1}{2} B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}([H_{\alpha}, X_{\alpha}], Y_{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(H_{\alpha}, [X_{\alpha}, Y_{\alpha}]) \\ &= \frac{1}{2} B_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\alpha}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

である. □

命題 1.19 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を複素分裂半単純 Lie 代数とし, ルート系が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く. ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の正系 Δ_+ を一つ固定する. $(X_{\alpha})_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対する Chevalley 系とし, これが定める対合を ψ と書く.

- (1) $\mathfrak{g} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{H_{\alpha}, X_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}$ と置くと, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の実形である.
- (2) (1) の実形 $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像を $\sigma: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く. このとき, $\psi\sigma = \sigma\psi$ であり, $\psi\sigma$ の固定点全体のなす空間は

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{R}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{R}i(X_{\alpha} - X_{-\alpha})$$

であり, $(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ のコンパクト実形である (すなわち, $(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の実形であり, $\mathfrak{u}$ はコンパクトである).

証明 (1) Chevalley 系に対応して定まる係数はすべて整数だから (命題 1.17), $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実部分 Lie 代数である. また, $\mathfrak{g} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{H_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathbb{R}X_{\alpha}$ だが, $\text{span}_{\mathbb{R}}\{H_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}$ はルート系が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{h}_0$ にほかならず, 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して $\mathbb{R}X_{\alpha}$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha} = \mathbb{C}X_{\alpha}$ の実形である. よって, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の実形である.

(2) $\psi\sigma$ と $\sigma\psi$ はともに $\mathfrak{g}$ の共役自己同型であり, 容易に確かめられるように実形 $\mathfrak{g}$ 上で一致するから, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上でも一致する. また, これより $(\psi\sigma)^2 = \psi\sigma\sigma\psi = \text{id}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ だから, $\psi\sigma = \sigma\psi$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の共役対合であり, その固定点全体のなす空間は $\mathfrak{g}$ の実形である. $\psi\sigma$ の固定点全体のなす空間が与えられた $\mathfrak{u}$ に等しいことは, 容易に確かめられる. $\mathfrak{u}$ は $i\mathfrak{h}_0$ を含み, $i\mathfrak{h}_0$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形だから, $(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の実形である.

$\mathfrak{u}$ がコンパクトであることを示す. そのためには, Killing 形式 $B_{\mathfrak{u}} = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}|_{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}}$ が非退化負値であることをいえばよい (系 1.5). $\mathfrak{u}$ は

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{R}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{R}i(X_{\alpha} - X_{-\alpha})$$

と直和分解され, 次のことがいえる.

- $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ は $\mathfrak{h}_0$ 上で非退化正値だから (補題 1.18 (1)), $i\mathfrak{h}_0$ 上で非退化負値である.

- 各正ルート $\alpha \in \Delta_+$ に対して, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ と $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha} \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\alpha}$ は Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ に関して直交する (参照).
したがって, $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(i\mathfrak{h}_0, X_{\alpha} + X_{-\alpha}) = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(i\mathfrak{h}_0, i(X_{\alpha} - X_{-\alpha})) = 0$ である.
- 異なる二つの正ルート $\alpha, \beta \in \Delta_+$ に対して, $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha} \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\alpha}$ と $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\beta} \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\beta}$ は Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ に関して直交する (参照). したがって, $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}, X_{\beta} + X_{-\beta}) = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}, i(X_{\beta} - X_{-\beta})) = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(i(X_{\alpha} - X_{-\alpha}), i(X_{\beta} - X_{-\beta})) = 0$ である.
- 各 $\alpha \in \Delta_+$ に対して, $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha}, X_{\alpha}) = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{-\alpha}, X_{-\alpha}) = 0$ かつ $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) < 0$ だから (補題 1.18 (2), (3)),

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}, X_{\alpha} + X_{-\alpha}) &= B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(i(X_{\alpha} - X_{-\alpha}), i(X_{\alpha} + X_{-\alpha})) = 2B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) < 0, \\ B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}, i(X_{\alpha} - X_{-\alpha})) &= 0 \end{aligned}$$

である.

以上より, Killing 形式 $B_u = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}|_{u \times u}$ は非退化負値である. □

定義 1.20 (Chevalley 系に伴うコンパクト実形) 命題 1.19 の状況で, $(u, i\mathfrak{h}_0)$ (あるいは u) を, **Chevalley 系 $(X_{\alpha})_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ に伴う $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (あるいは $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ のコンパクト実形**という.

1.5 コンパクト実形の存在と共役性

補題 1.21 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純 Lie 代数, u をそのコンパクト実形とし, u に関する複素共役写像を $\tau: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く. このとき, 任意の $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ に対して, $B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(x, \tau(x)) < 0$ が成り立つ.

証明 Killing 形式 $B_u = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}|_{u \times u}$ は非退化負値だから (系 1.5), 任意の $x = u + iv \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ($u, v \in u$) に対して,

$$B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(x, \tau(x)) = B_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(u + iv, u - iv) = B_u(u, u) + B_u(v, v) < 0$$

である. □

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を複素分裂簡約 Lie 代数とする. 群準同型 $c \in \text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times})$ に対して, 線型写像 $\delta(c): \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を, 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cup \{0\}$ に対して $\delta(c)|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}} = c(\alpha)\text{id}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}}$ として定める. c の準同型性より, $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ を任意の $\alpha \in \mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して $e^{\alpha(h)} = c(\alpha)$ を満たすようにとれるから,

$$\delta(c) = e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(h)} \in \text{Int}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$$

が成り立つ. したがって, 群準同型

$$\delta: \text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times}) \rightarrow \text{Int}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$$

が定まる. 次の補題と定理では, この記号 δ を用いる.

補題 1.22 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を複素分裂簡約 Lie 代数とする. $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ であって $\phi|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \text{id}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ を満たすもの全体のなす群は, $\delta(\text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times}))$ に等しい.*³

*³ この主張は, 一般の標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数に対しても, 同様に成り立つ. 証明も同様にできる.

証明 $\delta(\text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times}))$ が主張の群に含まれることは明らかである. $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ が $\phi|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \text{id}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ を満たすとして, これが $\delta(\text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times}))$ に含まれることを示す. 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して,

$$\begin{aligned}\phi((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}) &= \{\phi(x) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \text{ に対して } [h, x] = \alpha(h)x\} \\ &= \{y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \text{ に対して } [h, \phi^{-1}(y)] = \alpha(h)\phi^{-1}(y)\} \\ &= \{y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \text{ に対して } [\phi(h), y] = \alpha(h)y\} \\ &= \{y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \text{ に対して } [h, y] = \alpha(h)y\} \\ &= (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}\end{aligned}$$

であり, ルート空間 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}$ は 1 次元だから (参照),

$$\phi|_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}} = c(\alpha)\text{id}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha}} \quad (c(\alpha) \in \mathbb{C}^{\times})$$

と置ける.

各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対して, ルートベクトル $X_{\alpha} \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha} \setminus \{0\}$ を固定する. まず, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ とすると, $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ (参照) かつ

$$c(\alpha)c(-\alpha)[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = [\phi(X_{\alpha}), \phi(X_{-\alpha})] = \phi([X_{\alpha}, X_{-\alpha}]) = [X_{\alpha}, X_{-\alpha}]$$

だから,

$$c(-\alpha) = c(\alpha)^{-1}$$

である. 次に, $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ とすると, $[X_{\alpha}, X_{\beta}] \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\alpha+\beta} \setminus \{0\}$ (参照) かつ

$$c(\alpha)c(\beta)[X_{\alpha}, X_{\beta}] = [\phi(X_{\alpha}), \phi(X_{\beta})] = \phi([X_{\alpha}, X_{\beta}]) = c(\alpha + \beta)[X_{\alpha}, X_{\beta}]$$

だから,

$$c(\alpha + \beta) = c(\alpha)c(\beta)$$

である. したがって, c はルート格子 $\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ から $\mathbb{C}^{\times}$ への群準同型に (一意に) 拡張される (参照). この拡張をそのまま $c \in \text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times})$ と書けば, $\phi = \delta(c)$ である. $\square$

定理 1.23 (コンパクト実形の存在と共役性 I) 複素分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ は, $\delta(\text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{R}_{>0}))$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもつ.

証明 ルート系が定める $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の実形を $\mathfrak{h}_0$ と書く. $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ に対する Chevalley 系 $(X_{\alpha})_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ を一つ固定し (定理 1.13), これに伴うコンパクト実形を $(\mathfrak{u}, i\mathfrak{h}_0)$ と置き, $\mathfrak{u}$ に関する複素共役写像を $\tau: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く. 命題 1.19 より, τ は,

$$\tau(H_{\alpha}) = -H_{\alpha}, \quad \tau(X_{\alpha}) = X_{-\alpha} \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))$$

によって定まる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の共役対合である.

$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ のコンパクト実形 $(\mathfrak{u}', i\mathfrak{h}_0)$ を任意にとり (系 1.8 より, Cartan 部分代数は必ず $i\mathfrak{h}_0$ である), $\mathfrak{u}'$ に関する複素共役写像を $\tau': \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く. τ と τ' はともに $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の共役対合で $\tau|_{i\mathfrak{h}_0} = \tau'|_{i\mathfrak{h}_0} = \text{id}_{i\mathfrak{h}_0}$ を満たすから, $\tau\tau'$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の自己同型で $(\tau\tau')|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \text{id}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ を満たす. したがって, 補題 1.22 より, ある $c \in \text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C}^{\times})$ が存在して,

$$\tau\tau'(X_{\alpha}) = c(\alpha)X_{\alpha} \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})),$$

すなわち

$$\tau'(X_\alpha) = \overline{c(\alpha)}X_{-\alpha} \quad (\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}))$$

となる. 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に対して, 補題 1.18 (3) と補題 1.21 より

$$B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0, \quad \overline{c(\alpha)}B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X_\alpha, \tau'(X_\alpha)) < 0$$

だから, $c(\alpha) \in \mathbb{R}_{>0}$ である. よって, $c \in \text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}), \mathbb{R}_{>0})$ である.

前段の c に対して, $d \in \text{Hom}(\mathbb{Z}\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}), \mathbb{R}_{>0})$ を $d^{-2} = c$ となるようにとる. 各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned} \delta(d)\tau\delta(d)^{-1}(H_\alpha) &= -H_\alpha, \\ \delta(d)\tau\delta(d)^{-1}(X_\alpha) &= d(-\alpha)d(\alpha)^{-1}X_{-\alpha} = c(\alpha)X_{-\alpha} \end{aligned}$$

だから, $\delta(d)\tau\delta(d)^{-1} = \tau'$ である. u と u' はそれぞれ τ と τ' の固定点全体のなす空間だから, これより, $\delta(d)(u) = u'$ が成り立つ. $\square$

系 1.24 複素分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ の任意のコンパクト実形は, ある Chevalley 系に伴うものである.

証明 命題 1.19 と定理 1.23 から従う. $\square$

定理 1.25 (コンパクト実形の存在と共役性 II) 複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ は, $\text{Int}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもつ.

証明 存在 Chevalley 系の存在 (定理 1.13) と命題 1.19 から従う.

共役性 u と u' を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のコンパクト実形とし, それぞれの Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}'$ をとる. すると, $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と $\mathfrak{t}'_{(\mathbb{C})}$ はともに $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の Cartan 部分代数だから, これらは $\text{Int}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の作用によって移り合う (Cartan 部分代数の共役性). したがって, はじめから $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} = \mathfrak{t}'_{(\mathbb{C})}$ としてよいが, このとき, 主張は定理 1.23 から従う. $\square$

系 1.26 複素簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ は, $\text{Aut}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもつ.

証明 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ は簡約だから, 複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}'_\mathbb{C}$ と複素可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}_\mathbb{C}$ に直和分解される (参照). u' が $\mathfrak{g}'_\mathbb{C}$ のコンパクト実形で $\mathfrak{z}$ が $\mathfrak{z}_\mathbb{C}$ の実形ならば $u' \oplus \mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のコンパクト実形であり, 逆に $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のコンパクト実形はこの形のもので尽くされる. 定理 1.23 より $\mathfrak{g}'_\mathbb{C}$ は $\text{Int}(\mathfrak{g}'_\mathbb{C})$ の下の共役を除いて一意なコンパクト実形をもち, $\mathfrak{z}_\mathbb{C}$ の実形はすべて $\text{Aut}(\mathfrak{z}_\mathbb{C}) = GL(\mathfrak{z}_\mathbb{C})$ の下で共役だから, 主張が成り立つ. $\square$

注意 1.27 系 1.26 の証明の状況で, $\text{Int}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の $\mathfrak{z}_\mathbb{C}$ への作用は自明である. したがって, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ が半単純でない限り, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ のコンパクト実形は, $\text{Int}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の下の共役を除いても一意ではない.

系 1.28 (1) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が同型であるための必要十分条件は, それらの複素化 $(\mathfrak{g}_1)_{(\mathbb{C})}$ と $(\mathfrak{g}_2)_{(\mathbb{C})}$ が同型であることである.

(2) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は, その複素化 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ が半単純であることである.

(3) コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が単純であるための必要十分条件は, その複素化 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ が単純であることである.

証明 (1) 必要性は明らかであり, 十分性はコンパクト実形の共役性 (系 1.26) から従う.

(2) 半単純 Lie 代数の一般論 (参照) である.

(3) 十分性は、単純 Lie 代数の一般論 (参照) である。必要性を示す。 $\mathfrak{g}$ が単純であるとする。(2) より $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ は半単純だから、 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})} = (\mathfrak{g}_1)_{\mathbb{C}} \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_n)_{\mathbb{C}}$ と複素単純 Lie 代数の直和に分解される。コンパクト実形の存在 (定理 1.25) より、各 $(\mathfrak{g}_i)_{\mathbb{C}}$ はコンパクト実形 $\mathfrak{g}_i$ をもつ。それらの直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ は $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ のコンパクト実形となるから、コンパクト実形の共役性 (定理 1.25) より、 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ である。ところが、 $\mathfrak{g}$ は単純だから、 $n = 1$ でなければならない。よって、 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ は単純である。 $\square$

系 1.28 より、コンパクト Lie 代数の同型類と複素簡約 Lie 代数の同型類とは、複素化・コンパクト実形をとる操作によって一対一に対応し、その中で、コンパクト半単純 Lie 代数の同型類と複素半単純 Lie 代数の同型類、コンパクト単純 Lie 代数の同型類と複素単純 Lie 代数の同型類とが、それぞれ一対一に対応する。したがって、 A_l 型 ($l \geq 1$)、 B_l 型 ($l \geq 1$)、 C_l 型 ($l \geq 1$)、 D_l 型 ($l \geq 2$)、 E_6 型、 E_7 型、 E_8 型、 F_4 型、 G_2 型のコンパクト半単純 Lie 代数が、それぞれ同型を除いて一意に存在する。 D_2 以外の各型のコンパクト半単純 Lie 代数は、単純である。

1.6 古典型コンパクト単純 Lie 代数

本小節では、古典型コンパクト (半) 単純 Lie 代数とその Cartan 部分代数を、具体的に構成する。

A_l ($l \geq 1$) 型のコンパクト単純 Lie 代数

実 Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) を、

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}, \\ \mathfrak{su}(n) &= \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})\end{aligned}$$

と定める。 $\mathfrak{u}(n)$ と $\mathfrak{su}(n)$ はそれぞれ、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の実形であり、コンパクト連結 Lie 群

$$\begin{aligned}U(n) &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^*g = I_n\}, \\ SU(n) &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})\end{aligned}$$

の Lie 代数である。よって、 $\mathfrak{su}(l+1)$ ($l \geq 1$) は、 A_l 型のコンパクト単純 Lie 代数である。

$\mathfrak{u}(l+1)$ と $\mathfrak{su}(l+1)$ のそれぞれの Cartan 部分代数として、

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_{\mathfrak{u}(l+1)} &= \{i \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_{l+1}) \mid t_1, \dots, t_{l+1} \in \mathbb{R}\}, \\ \mathfrak{t}_{\mathfrak{su}(l+1)} &= \{i \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_{l+1}) \mid t_1, \dots, t_{l+1} \in \mathbb{R}, t_1 + \cdots + t_{l+1} = 0\}\end{aligned}$$

がとれる。

B_l ($l \geq 1$) 型と D_l ($l \geq 2$) 型のコンパクト (半) 単純 Lie 代数

実 Lie 代数 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}$) を、単に $\mathfrak{o}(n)$ と書く。すなわち、

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

である。 $\mathfrak{o}(n)$ は、 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ の実形であり、コンパクト連結 Lie 群

$$SO(n) = \{g \in SL(n, \mathbb{R}) \mid g^T g = I_n\}$$

の Lie 代数である。よって、 $\mathfrak{o}(2l+1)$ ($l \geq 1$) は B_l 型のコンパクト単純 Lie 代数であり、 $\mathfrak{o}(2l)$ ($l \geq 2$) は D_l 型のコンパクト半単純 Lie 代数 ($l \geq 3$ ならば、コンパクト単純 Lie 代数) である。

$\mathfrak{o}(2l+1)$ と $\mathfrak{o}(2l)$ のそれぞれの Cartan 部分代数として,

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_{\mathfrak{o}(2l+1)} &= \left\{ \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & t_l \\ -t_l & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \mid t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathfrak{t}_{\mathfrak{o}(2l)} &= \left\{ \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & t_l \\ -t_l & 0 \end{pmatrix} \right) \mid t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

がとれる.

C_l ($l \geq 1$) 型のコンパクト単純 Lie 代数

実 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) を,

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid X + X^* = 0\}$$

と定める. 実 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ から $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$ への単射準同型 $A + Bj \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ によって, $\mathfrak{sp}(n)$ は

$$\mathfrak{sp}(n)' = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{u}(n), B \in \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \right\}$$

に移される. $\mathfrak{sp}(n)'$ は $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の実形であり, $\mathfrak{sp}(n)$ はコンパクト連結 Lie 群

$$Sp(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{H}) \mid g^*g = I_n\}$$

の Lie 代数である. よって, $\mathfrak{sp}(l) \cong \mathfrak{sp}(l)'$ ($l \geq 1$) は, C_l 型のコンパクト単純 Lie 代数である.

$\mathfrak{sp}(l)$ の Cartan 部分代数として,

$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{sp}(l)} = \{i \text{diag}(t_1, \dots, t_l) \mid t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}\}$$

がとれる.

1.7 コンパクト単純 Lie 代数の分類

本小節では, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型の (同型を除いて一意に存在する) コンパクト単純 Lie 代数を, それぞれ $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$ と書く.

定理 1.29 (コンパクト単純 Lie 代数の分類) 次に挙げる実 Lie 代数は, いずれもコンパクトかつ単純である. 任意のコンパクト単純 Lie 代数は, これらのいずれかに同型である. (表 1 も参照のこと.)

- $\mathfrak{su}(n)$ ($n \geq 2$)
- $\mathfrak{o}(n)$ ($n = 3$ または ≥ 5)
- $\mathfrak{sp}(n)$ ($n \geq 1$)
- $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$

証明 系 1.28 (1), (3) より, コンパクト単純 Lie 代数の同型類と複素単純 Lie 代数の同型類とは, 複素化を通して一対一に対応する. よって, 主張は, [複素単純 Lie 代数の分類](#) と前小節で述べた古典型コンパクト単純 Lie 代数の構成から従う. $\square$

注意 1.30 (古典型コンパクト (半) 単純 Lie 代数の偶然同型) [古典型複素 \(半\) 単純 Lie 代数の偶然同型](#) と系 1.28 から, 古典型コンパクト (半) 単純 Lie 代数の偶然同型が従う (表 2). 分類定理 (定理 1.29) に挙げ

表 1 コンパクト単純 Lie 代数の分類

型	複素単純 Lie 代数	コンパクト単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$A_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(l+1)$	
$B_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{o}(2l+1)$	
$C_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(l)$	
$D_l \ (l \geq 2)$	$\mathfrak{o}(2l, \mathbb{C})$	$\mathfrak{o}(2l)$	
E_6	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$	$\mathfrak{e}_6$	
E_7	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$	$\mathfrak{e}_7$	
E_8	$\mathfrak{e}_8(\mathbb{C})$	$\mathfrak{e}_8$	
F_4	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})$	$\mathfrak{f}_4$	
G_2	$\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$	$\mathfrak{g}_2$	

表 2 古典型コンパクト Lie 代数の偶然同型

型	複素 (半) 単純 Lie 代数	コンパクト (半) 単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$A_1 \cong B_1 \cong C_1$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(3, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(1, \mathbb{K})$	$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{sp}(1)$	
$B_2 \cong C_2$	$\mathfrak{o}(5, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{K})$	$\mathfrak{o}(5) \cong \mathfrak{sp}(2)$	
$A_1 \oplus A_1 \cong D_2$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(4, \mathbb{K})$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(4)$	
$A_3 \cong D_3$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(6, \mathbb{K})$	$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{o}(6)$	

たコンパクト単純 Lie 代数の間の同型は、同表（「 $A_1 \oplus A_1 \cong D_2$ 」の行を除く）に挙げたもので尽くされている。

2 極大トーラス

2.1 連結可換 Lie 群

命題 2.1 T を連結可換 Lie 群とし、 $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く。

- (1) $(\mathfrak{t}, \exp_T)$ は T の普遍被覆 Lie 群であり、この被覆準同型の核 $\text{Ker}(\exp_T)$ は $\mathfrak{t}$ の離散部分群である。
- (2) T がコンパクトである（すなわち、トーラス（定義 2.7）である）とする。このとき、 $\text{Ker}(\exp_T)$ は $\mathfrak{t}$ 上の格子である。

証明 (1) 指数写像 $\exp_T$ は、点 $0 \in \mathfrak{t}$ において局所微分同相であり、 T が可換であることより準同型である。したがって、 $\exp_T$ は Lie 群の被覆準同型であり、その核 $\text{Ker}(\exp_T)$ は $\mathfrak{t}$ の離散部分群である。さらに、 $\mathfrak{t}$ は単連結であり T は連結だから、 $(\mathfrak{t}, \exp_T)$ は T の普遍被覆 Lie 群である。

(2) (1) より $\text{Ker}(\exp_T)$ は $\mathfrak{t}$ の離散部分群であり、 $\mathfrak{t}/\text{Ker}(\exp_T) \cong T$ はコンパクトだから、 $\text{Ker}(\exp_T)$ は $\mathfrak{t}$ 上の格子である。□

2.2 Cartan 部分群

命題 2.2 G をコンパクトな Lie 代数をもつ Lie 群、 T をその連結部分 Lie 群とし、 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ 、 $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く。次の条件は同値である。

- (a) T は G の連結閉可換部分 Lie 群の中で極大である。
- (b) T は G の連結可換部分 Lie 群の中で極大である。
- (c) $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間である。
- (d) $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である。

証明 (a) $\iff$ (b) G の連結可換部分 Lie 群の閉包はまた連結可換部分 Lie 群だから (閉部分群定理を用いた)、 T が連結可換部分 Lie 群の中で極大ならば T は閉である。よって、 T が G の連結閉可換部分 Lie 群の中で極大であることと、連結可換部分 Lie 群の中で極大であることは同値である。

(b) $\iff$ (c) G の連結可換部分 Lie 群と $\mathfrak{g}$ の可換部分空間とは、Lie 代数をとる操作によって一対一に対応し、この対応は包含関係を保つ。よって、 T が G の連結可換部分 Lie 群の中で極大であることと、 $\mathfrak{t}$ が $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間であることは同値である。

(c) $\iff$ (d) 系 1.6 ですでに示した。□

定義 2.3 (Cartan 部分群) コンパクトな Lie 代数をもつ Lie 群 G の **連結 Cartan 部分群** (connected Cartan subgroup) とは、連結部分 Lie 群 $T \subseteq G$ であって命題 2.2 の同値な条件を満たすものをいう。 G が連結である場合には、その連結 Cartan 部分群を単に **Cartan 部分群** (Cartan subgroup) という。

命題 2.4 (Cartan 部分群の存在と共役性) コンパクトな Lie 代数をもつ Lie 群 G は、共役を除いて一意な連結 Cartan 部分群をもつ。

証明 コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ は、 $\text{Ad}(G)$ の下の共役を除いて一意な Cartan 部分代数をもつ (定理 1.10, 注意 1.11)。よって、主張は、命題 2.2 の条件 (d) から従う。□

命題 2.5 G をコンパクトな Lie 代数をもつ Lie 群とする。 G の任意の連結可換部分 Lie 群 S に対して、それを含む G の連結 Cartan 部分群が存在する。

証明 $\text{Lie}(S)$ は $\text{Lie}(G)$ の可換部分 Lie 代数だから、それを含む極大可換部分空間 $\mathfrak{t} \subseteq \text{Lie}(G)$ がとれる。 G の連結部分 Lie 群であって $\mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつものを T と置くと、 T は G の Cartan 部分群であり (命題 2.2 の条件 (c))、 S を含む。□

命題 2.6 G をコンパクトな Lie 代数をもつ Lie 群とし、 T を G の連結 Cartan 部分群とする。このとき、 $G = G_0 \mathbf{N}_G(T) = \mathbf{N}_G(T) G_0$ である。

証明 $g \in G$ を任意にとる. T と gTg^{-1} はともに G_0 の連結 Cartan 部分群だから, 連結 Cartan 部分群の共役性 (命題 2.4) より, ある $g_0 \in G_0$ が存在して $g_0gTg^{-1}g_0^{-1} = T$ となる. このとき, $g_0g \in \mathbf{N}_G(T)$ だから, $g = g_0^{-1}(g_0g) \in G_0\mathbf{N}_G(T)$ である. よって, $G = G_0\mathbf{N}_G(T)$ であり, 逆元をとる写像を考えれば, $G = \mathbf{N}_G(T)G_0$ も得られる. $\square$

2.3 極大トーラスの性質

定義 2.7 (トーラス) コンパクト連結可換 Lie 群を, **トーラス** (torus) という.

定義 2.8 (極大トーラス) Lie 群 G の **トーラス** (torus) とは, その部分 Lie 群であってトーラスであるものをいう. G のトーラスの中で極大なものを, G の **極大トーラス** (maximal torus) という.

コンパクト Lie 群のトーラスとは, その連結閉可換部分 Lie 群のことにほかならない. したがって, コンパクト Lie 群の極大トーラスとは, その連結 Cartan 部分群のことにほかならない (命題 2.2 の条件 (a)).

補題 2.9 G をコンパクト Lie 群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く. このとき, $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ の任意の元は, 半単純である.

証明 $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ はコンパクトだから, $\mathfrak{g}$ 上の $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ 不変な内積がとれる. $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ の任意の元は, この内積に関する直交変換だから, 半単純である. $\square$

補題 2.10 G をコンパクト Lie 群とする. 写像 $\phi: G \times G \rightarrow G$ を, $\phi(g, t) = gtg^{-1}$ と定める. このとき, 任意の点 $t \in G$ に対して, $\phi(G \times t\mathbf{Z}_G(t)_0)$ は t の近傍である.

証明 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く. ϕ の点 (e, t) における微分 $d\phi_{(e,t)}: \mathfrak{g} \times t\mathfrak{g} \rightarrow t\mathfrak{g}$ は

$$\begin{aligned} d\phi_{(e,t)}(x, 0) &= \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} e^{rx} t e^{-rx} = \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} t e^{r \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})x} e^{-rx} = t(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})x - x), \\ d\phi_{(e,t)}(0, ty) &= \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} t e^{ty} = ty \end{aligned}$$

で与えられるから,

$$d\phi_{(e,t)}(\mathfrak{g} \times t\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t)) = t((\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1}) - \text{id}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{g}) + \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t))$$

である. ここで, $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1})$ は半単純だから (補題 2.9), $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ は $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(t^{-1})$ の固有空間に直和分解される. $(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1}) - \text{id}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{g})$ の複素化は 1 以外の固有値の固有空間の直和に等しく, $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t)$ の複素化は固有値 1 の固有空間に等しいから, これらの和は $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 全体となる. したがって, $(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(t^{-1}) - \text{id}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{g}) + \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t) = \mathfrak{g}$ である. よって, $d\phi_{(e,t)}(\mathfrak{g} \times t\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t)) = t\mathfrak{g}$ だから, $\phi(G \times t\mathbf{Z}_G(t)_0)$ は t の近傍である. $\square$

定理 2.11 G をコンパクト連結 Lie 群とし, T をその極大トーラスとする. このとき, G の任意の元は, T のある元に共役である.

証明 写像 $\phi: G \times G \rightarrow G$ を, $\phi(g, t) = gtg^{-1}$ と定める. G と T はコンパクトだから, $\phi(G \times T)$ はコンパクトであり, したがって, G において閉である. あとは, $\phi(G \times T)$ が G において開であることを示せば, $\phi(G \times T) = G$ であることがわかる. $\phi(G \times T)$ は G の共役による作用に関して安定だから, $\phi(G \times T)$ が G において開であることを示すためには, $\phi(G \times T)$ が任意の点 $t \in T$ の近傍であることを示せば十分である. このことを, G の次元に関する帰納法で示す. $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く.

まず, $t \in \mathbf{Z}(G)$ である場合を考える. 任意の $x \in \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のある極大可換部分空間 $\mathfrak{t}'$ に含まれ, これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を T' と書くと, $e^x \in T'$ である. T' は G の極大トーラスだから, ある $g \in G$ が存在して $ge^xg^{-1} \in gT'g^{-1} = T$ となる (命題 2.4). この g について, $t \in \mathbf{Z}(G)$ より $te^x = g^{-1}tge^xg^{-1}g = \phi(g^{-1}, tge^xg^{-1}) \in \phi(G \times T)$ が成り立つ. よって, $t \exp(\mathfrak{g}) \subseteq \phi(G \times T)$ だから, $\phi(G \times T)$ は t の近傍である.

次に, $t \notin \mathbf{Z}(G)$ である場合を考える. $\mathbf{Z}_G(t)$ の主連結成分 $\mathbf{Z}_G(t)_0$ は, コンパクト連結 Lie 群である. $T \subseteq \mathbf{Z}_G(t)$ であり, T は連結だから, $T \subseteq \mathbf{Z}_G(t)_0$ である. T は G の極大トーラスだから, $\mathbf{Z}_G(t)_0$ の極大トーラスでもある. また, $t \notin \mathbf{Z}(G)$ より $\text{Lie}(\mathbf{Z}_G(t)_0) = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(t) \subsetneq \mathfrak{g}$ だから, $\dim \mathbf{Z}_G(t)_0 < \dim G$ である. したがって, 帰納法の仮定より

$$\mathbf{Z}_G(t)_0 = \phi(\mathbf{Z}_G(t)_0 \times T) \subseteq \phi(G \times T)$$

だから,

$$\phi(G \times \mathbf{Z}_G(t)_0) = \phi(G \times T)$$

を得る. 一方で, 補題 2.10 より, $\phi(G \times \mathbf{Z}_G(t)_0) = \phi(G \times t\mathbf{Z}_G(t)_0)$ ($t \in T \subseteq \mathbf{Z}_G(t)_0$ であることを用いた) は t の近傍である. よって, $\phi(G \times T)$ は t の近傍である. これで, 帰納法が完成した. $\square$

系 2.12 コンパクト連結 Lie 群 G の指数写像は, 全射である.

証明 定理 2.11 より, G はその極大トーラス全体の合併に等しい. トーラスの指数写像は全射だから (命題 2.1 (1)), G の指数写像も全射である. $\square$

系 2.13 コンパクト連結 Lie 群 G のすべての極大トーラスの交叉は, 中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい.

証明 定理 2.11 より G はその極大トーラス全体の合併に等しいから, $z \in G$ が G のすべての極大トーラスに含まれるとすると, $z \in \mathbf{Z}(G)$ である. 一方で, T を G の極大トーラスとすると, 定理 2.11 より, 任意の $z \in \mathbf{Z}(G)$ に対してある $g \in G$ が存在して $z = gzg^{-1} \in T$ となる. よって, G のすべての極大トーラスの交叉は, 中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい. $\square$

系 2.14 G をコンパクト連結 Lie 群とし, S をその連結可換部分 Lie 群とする. このとき, 中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は, G の極大トーラスであって S を含むものの全体の合併に等しい.

証明 任意の $g \in \mathbf{Z}_G(S)$ に対して, G の極大トーラスであって g と S を含むものが存在することを示せばよい. $\mathbf{Z}_G(g)$ の主連結成分 $\mathbf{Z}_G(g)_0$ は, コンパクト連結 Lie 群である. $S \subseteq \mathbf{Z}_G(g)$ であり, S は連結だから, $S \subseteq \mathbf{Z}_G(g)_0$ である. また, 定理 2.11 より G の極大トーラスであって g を含むものが存在するから, $g \in \mathbf{Z}_G(g)_0$ である. $\mathbf{Z}_G(g)_0$ の極大トーラス T であって S を含むものをとると (命題 2.5), 系 2.13 より $g \in \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_G(g)_0) \subseteq T$ である. g を含むトーラスは必ず $\mathbf{Z}_G(g)_0$ に含まれるから, T は G の極大トーラスでもある. これで, 主張が示された. $\square$

系 2.15 G をコンパクト連結 Lie 群とする.

- (1) G の連結可換部分 Lie 群 S に対して, 中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は連結である.
- (2) G の極大トーラス T に対して, 中心化子 $\mathbf{Z}_G(T)$ は T に等しい. 特に, T は G において極大可換である.

証明 系 2.14 から従う. $\square$

系 2.16 G をコンパクト連結 Lie 群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合とし, $\mathfrak{a}$ の任意の二つの元は可換であるとする. このとき, $\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a})$ は連結である.

証明 仮定より, $\text{span}_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 代数である. これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を A と置くと, $\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(\text{span}_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(A)$ だから, 主張は系 2.15 (1) から従う. $\square$

本小節で述べたコンパクト連結 Lie 群に関する結果は, コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群の Cartan 部分群にまで拡張できる. 3.2 節を参照のこと.

2.4 ルート格子と整ベクトルのなす加法群

$\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数, $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とし, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$, $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ (これは自然に $i\mathbb{R}$ と同一視される) と置く. 本稿の以下の部分では, 次の記号を用いる.

- $Q(\Delta)$ で, ルート格子 $\mathbb{Z}\Delta$ を表す.
- $P(\Delta)$ で, Δ に関する整ベクトルのうち $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ に属するもの全体のなす加法群を表す. すなわち,

$$P(\Delta) = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* \mid \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \lambda(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}\}$$

である.

- $Q(2\pi i\Delta^{\vee})$ で, ルート格子 $\mathbb{Z}(2\pi i\Delta^{\vee}) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{2\pi iH_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta\}$ を表す.
- $P(2\pi i\Delta^{\vee})$ で, $2\pi i\Delta^{\vee}$ に関する整ベクトルのうち $\mathfrak{t}$ に属するもの全体のなす加法群を表す. すなわち,

$$P(2\pi i\Delta^{\vee}) = \{h \in \mathfrak{t} \mid \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \alpha(h) \in 2\pi i\mathbb{Z}\}$$

である.

補題 2.17 V と V' を有限次元実ベクトル空間とし, $\langle -, - \rangle: V' \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を非退化双線型形式とする. Γ を V の閉部分群とし,

$$\Gamma^{\vee} = \{v' \in V' \mid \langle v', \Gamma \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

と置くと,

$$\Gamma = \{v \in V \mid \langle \Gamma^{\vee}, v \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ.

証明 有限次元実ベクトル空間の閉部分群の分類定理より, V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ と $k, l \in \mathbb{N}$ ($k+l \leq n$) が存在して, $\Gamma = \mathbb{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_k \oplus \mathbb{Z}e_{k+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_{k+l}$ と書ける. 非退化双線型形式 $\langle -, - \rangle$ に関する $(e_1, \dots, e_n)$ の双対基底を $(e'_1, \dots, e'_n)$ と書くと,

$$\Gamma^{\vee} = \mathbb{Z}e'_{k+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e'_{k+l} \oplus \mathbb{R}e'_{k+l+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e'_n$$

である. 示すべき等式の右辺を $\Gamma^{\vee\vee}$ と置くと,

$$\Gamma^{\vee\vee} = \mathbb{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_k \oplus \mathbb{Z}e_{k+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_{k+l} = \Gamma$$

となり, 主張が成り立つ. $\square$

命題 2.18 $\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数, $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とし, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$, $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ と置く. $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ と $h \in \mathfrak{t}$ に対して, $\langle \lambda, h \rangle = (2\pi i)^{-1} \lambda(h)$ と定める. このとき,

$$\begin{aligned} Q(\Delta) &= \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* \mid \langle \lambda, P(2\pi i \Delta^\vee) \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}, & Q(2\pi i \Delta^\vee) &= \{h \in \mathfrak{t} \mid \langle P(\Delta), h \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}, \\ P(\Delta) &= \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* \mid \langle \lambda, Q(2\pi i \Delta^\vee) \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}, & P(2\pi i \Delta^\vee) &= \{h \in \mathfrak{t} \mid \langle Q(\Delta), h \rangle \subseteq \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

である.

証明 $P(\Delta)$ と $P(2\pi i \Delta^\vee)$ に関する等式は, これらの定義からただちに従う. また, これらの等式と補題 2.17 から, それぞれ $Q(2\pi i \Delta^\vee)$ と $Q(\Delta)$ に関する等式が従う. $\square$

2.5 加法群 $X(T)$

定義 2.19 T を連結可換 Lie 群とし, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. $X(T)$ と $X_{\mathbb{C}}(T)$ を,

$$\begin{aligned} X(T) &= \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda|_{\mathfrak{t}} \text{ の持ち上げ } \chi: T \rightarrow U(1) \text{ が存在する}\}, \\ X_{\mathbb{C}}(T) &= \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda|_{\mathfrak{t}} \text{ の持ち上げ } \chi: T \rightarrow \mathbb{C}^\times \text{ が存在する}\} \end{aligned}$$

と定める.

注意 2.20 T を連結可換 Lie 群とし, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く.

- (1) T 上の定数関数 1 は 0 の持ち上げである. また, $\lambda_1, \lambda_2 \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ とし, $\chi_1, \chi_2: T \rightarrow \mathbb{C}^\times$ (あるいは $U(1)$) がそれぞれ $\lambda_1|_{\mathfrak{t}}, \lambda_2|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げであるとする. $\chi_1 \chi_2$ は $(\lambda_1 + \lambda_2)|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げであり, χ_1^{-1} は $-\lambda_1|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げである. したがって, $X(T)$ と $X_{\mathbb{C}}(T)$ は, 加法に関して $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ の部分群をなす.
- (2) $\text{Lie}(U(1)) = i\mathbb{R}$ だから, $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ と置くと, $X(T) = X_{\mathbb{C}}(T) \cap (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ である.

命題 2.21 T を連結可換 Lie 群とし, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ と置く. $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ と $h \in \mathfrak{t}$ に対して, $\langle \lambda, h \rangle = (2\pi i)^{-1} \lambda(h)$ と定める. このとき,

$$X(T) = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* \mid \langle \lambda, \text{Ker}(\exp_T) \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}, \quad \text{Ker}(\exp_T) = \{h \in \mathfrak{t} \mid \langle X(T), h \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

である.

証明 $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ とする. T の 1 次元連続表現 $\chi: T \rightarrow U(1)$ が $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げであるための必要十分条件は, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow{\lambda|_{\mathfrak{t}}} & i\mathbb{R} \\ \exp_T \downarrow & & \downarrow \exp \\ T & \xrightarrow{\chi} & U(1) \end{array}$$

が可換であることである. 指数写像 $\exp_T$ は Lie 群の全射被覆準同型だから (命題 2.1 (1)), このような χ が存在するための必要十分条件は, $\lambda(\text{Ker}(\exp_T)) \subseteq 2\pi i\mathbb{Z}$ であることである. よって, $X(T)$ に関する等式が成り立つ. また, この等式と補題 2.17 から, $\text{Ker}(\exp_T)$ に関する等式が従う. $\square$

系 2.22 T をトーラスとし, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^* = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ と置く. このとき, $X(T) = X_{\mathbb{C}}(T)$ であり, これらは $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ 上の格子である.

証明 T はコンパクトだから、連続指標 $\chi: T \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は必ずユニタリである。したがって、 $X(T) = X_{\mathbb{C}}(T)$ である。また、 $\text{Ker}(\exp_T)$ は $\mathfrak{t}$ 上の格子だから (命題 2.1 (2)), 命題 2.21 より、 $X(T)$ は $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})_{\mathfrak{u}}^*$ 上の格子である。 $\square$

補題 2.23 $\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数とし、 $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とする。このとき、各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して、次の条件を満たす $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in \mathfrak{g}$ が存在する。

- (i) $x_\alpha, y_\alpha \in ((\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha \oplus (\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$ かつ $z_\alpha = (i/2)H_\alpha \in \mathfrak{t}$ である。
- (ii) $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ は線型独立である。
- (iii) $[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha$, $[y_\alpha, z_\alpha] = x_\alpha$, $[z_\alpha, x_\alpha] = y_\alpha$ である。

さらに、 $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ がこれらの条件を満たすとき、Lie 代数の単射準同型 $\phi_\alpha: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{g}$ であって

$$\phi\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = x_\alpha, \quad \phi\left(\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = y_\alpha, \quad \phi\left(\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = z_\alpha$$

を満たすものが、一意に存在する。

証明 一般性を失わず、 $\mathfrak{g}$ が半単純であると仮定する。系 1.24 より、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ は $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対するある Chevalley 系 $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})}$ に伴うコンパクト実形である。そこで、

$$x_\alpha = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}), \quad y_\alpha = \frac{i}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha}), \quad z_\alpha = \frac{i}{2}H_\alpha$$

と置くと、 $x_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}$ かつ $z_\alpha \in \mathfrak{t}$ であり、これらは線型独立であり、

$$\begin{aligned} [x_\alpha, y_\alpha] &= \frac{i}{4}[X_\alpha + X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}] = \frac{i}{2}H_\alpha = z_\alpha, \\ [y_\alpha, z_\alpha] &= -\frac{1}{4}[X_\alpha - X_{-\alpha}, H_\alpha] = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}) = x_\alpha, \\ [z_\alpha, x_\alpha] &= \frac{i}{4}[H_\alpha, X_\alpha + X_{-\alpha}] = \frac{i}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha}) = y_\alpha \end{aligned}$$

を満たす。一方で、 $\mathfrak{su}(2)$ の基底

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

も同じ交換関係を満たす。よって、主張の条件を満たす Lie 代数の単射準同型が一意に存在する。 $\square$

命題 2.24 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群、 T をその Cartan 部分群とし、 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く。

- (1) $Q(\Delta) \subseteq X(T) \subseteq P(\Delta)$ である。
- (2) $Q(2\pi i\Delta^\vee) \subseteq \text{Ker}(\exp_T) \subseteq P(2\pi i\Delta^\vee)$ である。

証明 G の随伴表現の T への制限 $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}|_T$ の微分表現は、 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ の随伴表現の $\mathfrak{t}$ への制限 $\text{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}|_{\mathfrak{t}}$ であり、 $h \in \mathfrak{t}$ は各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha$ に $\alpha(h)$ 倍写像として作用する。したがって、 $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}|_T$ は各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha$ 上の 1 次元部分表現を定め、これが $\alpha|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げとなる。よって、 $\Delta \subseteq X(T)$ だから、 $Q(\Delta) \subseteq X(T)$ が成り立つ。このことと命題 2.18 と命題 2.21 より、 $\text{Ker}(\exp_T) \subseteq P(2\pi i\Delta^\vee)$ も成り立つ。

補題 2.23 より, 各ルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して, Lie 代数の単射準同型 $\phi_\alpha: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{g}$ であって

$$\phi_\alpha\left(i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = iH_\alpha$$

を満たすものがとれる. さらに, $SU(2)$ は $\mathfrak{su}(2)$ を Lie 代数にもつ単連結 Lie 群だから, ϕ_α は Lie 群の準同型 $f_\alpha: SU(2) \rightarrow G$ に持ち上がる. したがって,

$$\exp(2\pi i H_\alpha) = \exp\left(\phi_\alpha\left(2\pi i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\right) = f_\alpha\left(\exp\left(2\pi i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\right) = f_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

であり, $2\pi i H_\alpha \in \text{Ker}(\exp_T)$ を得る. よって, $Q(2\pi i \Delta^\vee) \subseteq \text{Ker}(\exp_T)$ が成り立つ. このことと命題 2.18, 命題 2.21 より, $X(T) \subseteq P(\Delta)$ も成り立つ. $\square$

2.6 Weyl 群

定義 2.25 (Weyl 群) G をコンパクト連結 Lie 群とし, T をその極大トーラスとする. (G, T) の **Weyl 群** (Weyl group) を,

$$\mathbf{W}(G, T) = \mathbf{N}_G(T)/\mathbf{Z}_G(T) = \mathbf{N}_G(T)/T$$

と定める (第 2 の等号は, 系 2.15 より成り立つ).

注意 2.26 G をコンパクト連結 Lie 群とし, T をその極大トーラスとし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. $\mathbf{N}_G(T)$ は G の閉部分群だからコンパクトであり, その Lie 代数は $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ である. したがって, Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T) = \mathbf{N}_G(T)/T$ は有限である.

$gT \in \mathbf{W}(G, T)$ ($g \in \mathbf{N}_G(T)$) に対して Lie 群 T の自己同型 $t \mapsto gtg^{-1}$ が代表元 g のとり方によらずに定まり, これによって, Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T)$ の Lie 群 T への作用が定まる. さらに, この作用の微分とその反傾表現を考えることにより, Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T)$ の $\mathfrak{t}$ や $\mathfrak{t}^*$ 上の連続表現が定まる.

命題 2.27 G をコンパクト連結 Lie 群とし, T をその極大トーラスとする. Weyl 群 $\mathbf{W}(G, T)$ の T への作用に関する軌道空間 $\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ と, G の共役類空間 (G の自身への共役による作用に関する軌道空間) $G^\sharp$ を考える. このとき, T から G への包含写像は, $\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ から $G^\sharp$ への同相写像を誘導する.

証明 二つの点 $t, t' \in T$ が $\mathbf{W}(G, T)$ の作用で移り合うならば, ある $g \in \mathbf{N}_G(T)$ が存在して $gtg^{-1} = t'$ となるから, G において共役である. したがって, T から G への包含写像は, 連続写像 $\iota: \mathbf{W}(G, T) \backslash T \rightarrow G^\sharp$ を誘導する. G の任意の元は T のある元に共役だから (定理 2.11), ι は全射である. ι の単射性を示す. そのためには, $t \in T$ と $g \in G$ が $gtg^{-1} \in T$ を満たすとして, ある $g_1 \in \mathbf{N}_G(T)$ が存在して $g_1 t g_1^{-1} = gtg^{-1}$ となることを示せばよい. $\mathbf{Z}_G(gt^{-1})$ の主連結成分 $\mathbf{Z}_G(gt^{-1})_0$ はコンパクト連結 Lie 群であり, T と gtg^{-1} をともに含む. T と gtg^{-1} は, G の極大トーラスだから, $\mathbf{Z}_G(gt^{-1})_0$ の極大トーラスでもある. したがって, 極大トーラスの共役性 (命題 2.4) より, ある $z \in \mathbf{Z}_G(gt^{-1})_0$ が存在して $zgtg^{-1}z^{-1} = T$ を満たす. よって, $g_1 = zg$ と置けば, $g_1 \in \mathbf{N}_G(T)$ かつ $g_1 t g_1^{-1} = zgtg^{-1}z^{-1} = gtg^{-1}$ となる.

$\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ と $G^\sharp$ はともに, コンパクト Hausdorff 群のコンパクト Hausdorff 空間への (したがって, 固有な) 連続作用に関する軌道空間だから, コンパクト Hausdorff 空間である. 前段で示したように, ι は $\mathbf{W}(G, T) \backslash T$ から $G^\sharp$ への連続全単射だから, 同相である. $\square$

補題 2.28 W を群とし, W' をその部分群とする. W 集合 X であって, W の X への作用が自由であり, W' の X への作用が推移的であるものが存在するとする. このとき, $W' = W$ である.

証明 $w \in W$ を任意にとり, 1 点 $x \in X$ を固定する. W' の X への作用が推移的であることより, ある $w' \in W'$ が存在して $w \cdot x = w' \cdot x$ を満たす. W の X への作用は自由だから, $w = w' \in W'$ を得る. よって, $W' = W$ である. $\square$

補題 2.29 G をコンパクト連結 Lie 群, T をその極大トーラスとし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. このとき, 任意の $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して, ある $g \in \mathbf{N}_G(T)$ が存在して, $w = \text{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{* -1}$ を満たす.

証明 任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して, ルート鏡映 s_α がある $g_\alpha \in \mathbf{N}_G(T)$ を用いて $s_\alpha = \text{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g_\alpha)^{* -1}$ と表せることを示せばよい. $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ を補題 2.23 のようにとり, $t \in \mathbb{R}$ とする. 任意の $h \in \text{Ker}(\alpha)$ に対して, $\text{ad}(x_\alpha)h = 0$ より

$$\text{Ad}(e^{tx_\alpha})h = e^{t \text{ad}(x_\alpha)}(h) = h$$

である. また, $\text{ad}(x_\alpha)z_\alpha = -y_\alpha$ と $\text{ad}(x_\alpha)^2 z_\alpha = -\text{ad}(x_\alpha)y_\alpha = -z_\alpha$ より

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{tx_\alpha})z_\alpha &= e^{t \text{ad}(x_\alpha)}(z_\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \text{ad}(x_\alpha)^k z_\alpha \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} z_\alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} y_\alpha \\ &= \cos(t)z_\alpha - \sin(t)y_\alpha \end{aligned}$$

である. $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} = \mathbb{C}z_\alpha \oplus \text{Ker}(\alpha)$ だから, 上式より, $\text{Ad}(e^{tx_\alpha})$ は $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ を安定にし, したがって, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \cap \mathfrak{g}$ も安定にする. これより, $e^{tx_\alpha} \in \mathbf{N}_G(T)$ である. さらに, $t = \pi$ のときは,

$$\text{Ad}(e^{\pi x_\alpha})h = h \quad (h \in \text{Ker}(\alpha)), \quad \text{Ad}(e^{\pi x_\alpha})z_\alpha = -z_\alpha$$

となるから, $\text{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(e^{\pi x_\alpha}) = s_\alpha^{* -1}$ が成り立つ. よって, $g_\alpha = e^{\pi x_\alpha}$ と置けばよい. $\square$

補題 2.30 G をコンパクト連結 Lie 群, T をその極大トーラスとし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする. このとき, $g \in \mathbf{N}_G(T)$ が $\text{Ad}_{\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}}(g)^{* -1}(\Pi) = \Pi$ を満たすならば, $g \in T$ である.

証明 Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$ と置く. $i\rho|_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}^*$ である (系 1.7). $\mathfrak{t}^*$ 上の $\mathbf{W}(G, T)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定し ($\mathbf{W}(G, T)$ は有限群だから, このような内積が存在する), この内積が定める線型同型 $\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^*$ によって $i\rho|_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}^*$ に対応する元を $h \in \mathfrak{t}$ と書く. $\mathfrak{t}^*$ 上の内積 $\langle -, - \rangle$ を複素化して得られる $(\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ 上の非退化対称双線型形式を同じ記号で表すと, 補題 2.29 より, $\langle -, - \rangle$ は $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ 不変である. したがって, ルート系の一般論 (参照 1, 参照 2) より, 任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ に対して

$$\alpha(h) = \langle \alpha, i\rho \rangle \neq 0 \quad (*)$$

が成り立つ.

$g \in \mathbf{N}_G(T)$ が $\mathrm{Ad}_{t_{(C)}}(g)^{* -1}(\Pi) = \Pi$ を満たすとする. すると, $\mathrm{Ad}_t(g)^{* -1}(i\rho|_t) = i\rho|_t$ であり, $\mathrm{Ad}_t(g)^{* -1}$ は $\mathfrak{t}^*$ 上の内積 $\langle -, - \rangle$ を不変にするから, $\mathrm{Ad}_t(h) = h$ である. すなわち, $g \in \mathbf{Z}_G(h)$ である. $\mathbf{Z}_G(h)$ は連結であり (系 2.16), その Lie 代数は

$$\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(h) = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}_{(C)}}(h) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}_{(C)} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{t}$$

だから ((*) より $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}_{(C)}}(h) = \mathfrak{t}_{(C)}$ であることを用いた), $\mathbf{Z}_G(h) = T$ である. よって, $g \in T$ である. $\square$

定理 2.31 G をコンパクト連結 Lie 群, T をその極大トーラスとし, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ と置く. $\mathbf{W}(G, T)$ から $(\mathfrak{t}_{(C)})^*$ への写像 $gT \mapsto \mathrm{Ad}_{t_{(C)}}(g)^{* -1}$ は, $\mathbf{W}(G, T)$ から $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(C)}, \mathfrak{t}_{(C)})$ への群同型を与える.

証明 $g \in \mathbf{N}_G(T)$ に対して, $\mathrm{Ad}_t(g) = \mathrm{id}_t$ であるための必要十分条件は, T から自身への写像 $t \mapsto gtg^{-1}$ が恒等写像であること, すなわち, $g \in \mathbf{Z}_G(T)$ であることである. したがって, $\phi(gT) = \mathrm{Ad}_{t_{(C)}}(g)^{* -1}$ によって定まる写像 $\phi: \mathbf{W}(G, T) \rightarrow GL((\mathfrak{t}_{(C)})^*)$ は, 単射群準同型である. あとは, $\phi(\mathbf{W}(G, T)) = \mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(C)}, \mathfrak{t}_{(C)})$ を示せばよい.

補題 2.29 より, $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(C)}, \mathfrak{t}_{(C)}) \subseteq \phi(\mathbf{W}(G, T))$ である. また, Weyl 群 $\mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(C)}, \mathfrak{t}_{(C)})$ はルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(C)}, \mathfrak{t}_{(C)})$ の基底全体のなす集合に推移的に作用し (参照), $\mathbf{W}(G, T)$ は同じ集合に自由に作用する (補題 2.30). よって, 補題 2.28 より, $\phi(\mathbf{W}(G, T)) = \mathbf{W}(\mathfrak{g}_{(C)}, \mathfrak{t}_{(C)})$ である. $\square$

3 コンパクト Lie 群の位相的性質

3.1 Weyl の定理

補題 3.1 G を局所コンパクト連結 Hausdorff 群, Γ をその離散部分群とし, G/Γ はコンパクトであるとすると, このとき, Γ は有限生成である.

証明 G/Γ がコンパクトであることより, コンパクト集合 $C \subseteq G$ であって $G = C\Gamma$ を満たすものがとれる. 必要ならば C を大きくとりなおして, $G = C^\circ\Gamma$ (C° は, C の内部を表す) であり, かつ $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ であるとしてよい. C^2 はコンパクト集合であり $(C^\circ g)_{g \in \Gamma}$ はその開被覆だから, 有限部分集合 $F \subseteq \Gamma$ であって $C^2 \subseteq C^\circ F \subseteq CF$ を満たすものが存在する. このことから帰納的に, 任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $C^n \subseteq CF$ であることがわかる. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ だったから, $G = CF$ を得る. したがって, 任意の $g \in \Gamma$ は $g = g_1 g_2$ ($g_1 \in C$, $g_2 \in F$) と書けるが, このとき $g_1 = gg_2^{-1} \in \Gamma$ だから, $g_1 \in C \cap \Gamma$ である. よって, Γ は群として有限部分集合 $(C \cap \Gamma) \cup F$ によって生成される. $\square$

補題 3.2 連結位相群 G の離散正規部分群 Γ は, 中心 $\mathbf{Z}(G)$ に含まれる.

証明 $x \in \Gamma$ を任意にとる. G から Γ への連続写像 $g \mapsto gxg^{-1}$ は, G が連結で Γ が離散であることより定値であり, 単位元 e を x に移すから, 常に値 x をとる. すなわち, $x \in \mathbf{Z}(G)$ である. $\square$

補題 3.3 G をコンパクト連結 Lie 群, $(\tilde{G}, p)$ をその連結な m 重被覆 Lie 群 ($m \in \mathbb{N}_{>0}$) とし, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(\tilde{G})$ と置く. T と $\tilde{T}$ をそれぞれ G と $\tilde{G}$ の極大トーラスとし, これらは共通の Lie 代数 $\mathfrak{t}$ をもつとする.

- (1) $p(\tilde{T}) = T$ であり, $(\tilde{T}, p|_{\tilde{T}})$ は T の連結な m 重被覆 Lie 群である.
- (2) $X(T) \subseteq X(\tilde{T})$ かつ $(X(\tilde{T}) : X(T)) = m$ が成り立つ.

証明 (1) $p(\tilde{T})$ は $\text{Lie}(p)(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群だから、 T に等しい。Lie 群の準同型 $p|_{\tilde{T}}: \tilde{T} \rightarrow T$ の微分は $\text{id}_{\mathfrak{t}}$ だから、 $p|_{\tilde{T}}$ は Lie 群の被覆準同型である。さらに、補題 3.2 と系 2.13 より $\text{Ker}(p) \subseteq \mathbf{Z}(\tilde{G}) \subseteq \tilde{T}$ だから、 $(\tilde{T}, p|_{\tilde{T}})$ の被覆次数は $(\tilde{G}, p)$ の被覆次数と等しく m である。

(2) T と $\tilde{T}$ の指数写像は $\exp_T = p|_{\tilde{T}} \circ \exp_{\tilde{T}}$ を満たすから、 $\text{Ker}(\exp_{\tilde{T}}) \subseteq \text{Ker}(\exp_T)$ かつ $(\text{Ker}(\exp_T) : \text{Ker}(\exp_{\tilde{T}})) = \# \text{Ker}(p|_{\tilde{T}}) = m$ である。よって、命題 2.21 と格子に関する一般論より、 $X(T) \subseteq X(\tilde{T})$ かつ $(X(\tilde{T}) : X(T)) = m$ が成り立つ。□

定理 3.4 (Weyl の定理) 連結 Lie 群 G がコンパクトかつ半単純な Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をもつならば、 G はコンパクトである。

証明 必要ならば普遍被覆 Lie 群を考えることで、一般性を失わず、 G は単連結であると仮定する。 $\mathfrak{g}$ がコンパクトであることより、 $\mathfrak{g}$ と同型な Lie 代数をもつコンパクト連結 Lie 群 G' が存在し、 G' は G のある離散正規部分群 Γ による商 G/Γ と同型である。 G がコンパクトであることを示すためには、 Γ が有限であることを示せばよい。

Γ は、有限生成であり (補題 3.1)、中心 $\mathbf{Z}(G)$ に含まれる (補題 3.2) から可換である。したがって、有限生成可換群の構造定理より、もし Γ が無限ならば、任意の $m \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して指数 m の部分群 $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ が存在する。等化準同型を $p: G/\Gamma_1 \rightarrow G/\Gamma$ と書くと、 $(G/\Gamma_1, p)$ は G/Γ の m 重被覆 Lie 群である。 G/Γ はコンパクトだから、 G/Γ_1 もコンパクトである。ここで、 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ を一つ固定し、これを Lie 代数にもつ G/Γ_1 と G/Γ の極大トーラスをそれぞれ $\tilde{T}$ と T と書く。また、 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置き、 $Q(\Delta)$ と $P(\Delta)$ を前小節のとおり定める。すると、

$$Q(\Delta) \subseteq X(T) \subseteq X(\tilde{T}) \subseteq P(\Delta), \quad (X(\tilde{T}) : X(T)) = m$$

である (命題 2.24 (1), 補題 3.3)。一方で、 $\mathfrak{g}$ が半単純であることより、 $Q(\Delta)$ と $P(\Delta)$ はともに実ベクトル空間 $\{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \lambda(\mathfrak{t}) \subseteq i\mathbb{R}\}$ 上の格子だから、 $(P(\Delta) : Q(\Delta)) < \infty$ である。これは、 $m \in \mathbb{N}_{>0}$ を任意にとれることに矛盾する。よって、背理法より、 Γ は有限である。□

系 3.5 G をコンパクト連結 Lie 群とし、 $(\tilde{G}, p)$ をその普遍被覆 Lie 群とする。このとき、次の条件は同値である。

- (a) G は半単純である。
- (b) 中心 $\mathbf{Z}(G)$ は有限である。
- (c) $\tilde{G}$ はコンパクトである。
- (d) 基本群 $\pi_1(G)$ は有限である。

証明 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く。 $\mathfrak{g}$ は、コンパクト半単純 Lie 代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に (Lie 代数として) 直和分解される (系 1.4)。

(a) $\iff$ (b) G が半単純であるための必要十分条件は、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ であることである。 $\mathbf{Z}(G)$ はコンパクト Lie 群 G の閉部分群であって $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつから、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ は、 $\mathbf{Z}(G)$ が有限であることと同値である。

(a) $\iff$ (c) $\tilde{G}'$ を $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を Lie 代数にもつ単連結 Lie 群とすると、 $\tilde{G} \cong \tilde{G}' \times \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ である (ここで、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を、加法によって Lie 群とみなしている)。Weyl の定理 (定理 3.4) より $\tilde{G}'$ はコンパクトだから、 $\tilde{G}$ がコンパクトであるための必要十分条件は、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ 、すなわち G が半単純であることである。

(c) $\iff$ (d) $\tilde{G}$ がコンパクトであることは、 $\text{Ker}(p)$ が有限であることと同値である。基本群 $\pi_1(G)$ は $\text{Ker}(p)$ に同型だから、主張が成り立つ。 $\square$

3.2 Cartan 部分群の性質

命題 3.6 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし、 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く。 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と置き、これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く。

- (1) G' はコンパクトである。
- (2) $G' \times \mathbf{Z}(G)_0$ から G への写像 $(g', z) \mapsto g'z$ は、Lie 群の全射被覆準同型である。

証明 (1) $\mathfrak{g}'$ はコンパクトかつ半単純だから (系 1.4)，主張は Weyl の定理 (定理 3.4) から従う。

(2) $G' \times \mathbf{Z}(G)_0$ から G への写像 $(g', z) \mapsto g'z$ を、 ϕ と書く。 G' の任意の元と $\mathbf{Z}(G)_0$ の任意の元は可換だから、 ϕ は Lie 群の準同型である。さらに、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ より $\text{Lie}(\phi): \mathfrak{g}' \times \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}$ は同型であり、 G は連結だから、 ϕ は Lie 群の全射被覆準同型である。 $\square$

命題 3.7 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし、 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く。 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と置き、これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く (命題 3.6 (1) より、 G' はコンパクトである)。このとき、 G' の極大トーラス T' に対して、 $T'\mathbf{Z}(G)_0$ は G の Cartan 部分群であり、 G の任意の Cartan 部分群は、 G' の一意な極大トーラス T' を用いてこのように表せる。

証明 $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}'$ に対して、 $\mathfrak{t}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であり、 $\mathfrak{g}$ の任意の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ は、 $\mathfrak{g}'$ の一意な Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}'$ を用いてこのように表せる。さらに、 $\mathfrak{t}'$ を Lie 代数にもつ G' の極大トーラスを T' と書くと、 $\mathfrak{t}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつ G の Cartan 部分群は $T'\mathbf{Z}(G)_0$ である。これで、主張が示された。 $\square$

命題 3.6 と命題 3.7 を用いて、2.3 節で述べたコンパクト連結 Lie 群の極大トーラスに対する結果を、コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群の Cartan 部分群にまで拡張する。

定理 3.8 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし、 T をその Cartan 部分群とする。このとき、 G の任意の元は、 T のある元に共役である。

証明 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ， $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と置き、 $\mathfrak{g}'$ を Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く。 G' はコンパクトであり (命題 3.6 (1))， G' の極大トーラス T' が存在して $T = T'\mathbf{Z}(G)_0$ が成り立つ (命題 3.7)。 $G = G'\mathbf{Z}(G)_0$ であり (命題 3.6 (2))， G' の任意の元は T' のある元に共役だから (定理 2.11)， G の任意の元は T のある元に共役である。 $\square$

系 3.9 コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群 G の指数写像は、全射である。

証明 定理 3.8 より、 G はその Cartan 部分群全体の合併に等しい。連結可換 Lie 群の指数写像は全射だから (命題 2.1 (1))， G の指数写像も全射である。 $\square$

系 3.10 コンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群 G のすべての Cartan 部分群の交叉は、中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい。

証明 定理 3.8 より G はその Cartan 部分群全体の合併に等しいから, $z \in G$ が G のすべての Cartan 部分群に含まれるとすると, $z \in \mathbf{Z}(G)$ である. 一方で, T を G の極大トーラスとすると, 定理 3.8 より, 任意の $z \in \mathbf{Z}(G)$ に対してある $g \in G$ が存在して $z = gzg^{-1} \in T$ となる. よって, G のすべての Cartan 部分群の交叉は, 中心 $\mathbf{Z}(G)$ に等しい. $\square$

命題 3.11 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし, S をその連結可換部分 Lie 群とする. このとき, 中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は, G の Cartan 部分群であって S を含むものの全体の合併に等しい.

証明 任意の $g \in \mathbf{Z}_G(S)$ に対して, G の Cartan 部分群であって g と S を含むものが存在することを示せばよい. $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{s} = \text{Lie}(S)$ と置く. $\mathfrak{s} + \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群は $S\mathbf{Z}(G)_0$ であり, これは $\mathbf{Z}_G(S\mathbf{Z}(G)_0) = \mathbf{Z}_G(S)$ を満たす. そこで, 必要ならば $S\mathbf{Z}(G)_0$ を改めて S と置くことで, 一般性を失わず, $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{s}$ であると仮定する.

$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と置き, これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を G' と書く. 命題 3.6 より, $g = g'z$ ($g' \in G'$, $z \in \mathbf{Z}(G)_0$) と書ける. $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}'$ と置くと, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ だから, $S = S'\mathbf{Z}(G)_0$ である. $\mathfrak{s}'$ を Lie 代数にもつ G' の連結部分 Lie 群を S' と書くと, 系 2.14 より, G' の極大トーラス T' であって g' と S' を含むものが存在する. $T = T'\mathbf{Z}(G)_0$ は G の Cartan 部分群であり (命題 3.7), $g = g'z$ と $S = S'\mathbf{Z}(G)_0$ を含む. これで, 主張が示された. $\square$

系 3.12 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とする.

- (1) G の連結可換部分 Lie 群 S に対して, 中心化子 $\mathbf{Z}_G(S)$ は連結である.
- (2) G の Cartan 部分群 T に対して, 中心化子 $\mathbf{Z}_G(T)$ は T に等しい. 特に, T は G において極大可換である.

証明 命題 3.11 から従う. $\square$

系 3.13 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合とし, $\mathfrak{a}$ の任意の二つの元は可換であるとする. このとき, $\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a})$ は連結である.

証明 仮定より, $\text{span}_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 代数である. これを Lie 代数にもつ G の連結部分 Lie 群を A と置くと, $\mathbf{Z}_G(\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(\text{span}_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}) = \mathbf{Z}_G(A)$ だから, 主張は系 3.12 (1) から従う. $\square$

3.3 部分群と商群の Cartan 部分群

補題 3.14 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とし, $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を Lie 代数の全射準同型とする. このとき, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ に対して, $f(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{h}$ の Cartan 部分代数である.*4

証明 $\text{Ker}(f)$ は簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ (命題 1.2) のイデアルだから, その補イデアル $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ が存在して, Lie 代数としての直和分解 $\mathfrak{g} = \text{Ker}(f) \oplus \mathfrak{a}$ が成り立つ. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数だから, 直和 Lie 代数の Cartan 部分代数に関する結果 (参照) より, $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ の Cartan 部分代数である. $f|_{\mathfrak{a}}$ は Lie 代数 $\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{h}$ への同型であり, $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{a}$ を $f(\mathfrak{t})$ に移すから, $f(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{h}$ の Cartan 部分代数である. $\square$

*4 この主張は, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ が一般の (標数 0 とは限らない) 可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数であっても成り立つ. 一般の場合の証明については, Bourbaki [1, §VII.2.1, Corollaire 2 du Proposition 4] を参照のこと.

命題 3.15 G と H をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし, $f: G \rightarrow H$ を Lie 群の全射準同型とする.

- (1) G の任意の Cartan 部分群 T_G に対して, $f(T_G)$ は H の Cartan 部分群である. さらに, H の任意の Cartan 部分群はこのように表せる.
- (2) $\text{Ker}(f) \subseteq \mathbf{Z}(G)$ とする. このとき, 写像 $T_G \mapsto f(T_G)$ と $T_H \mapsto f^{-1}(T_H)$ は, G の Cartan 部分群 T_G と H の Cartan 部分群 T_H との間の (互いに他の逆である) 一対一対応を与える.

証明 (1) 命題 1.2 より, $\text{Lie}(G)$ と $\text{Lie}(H)$ は簡約である. G は連結で f は Lie 群の全射準同型だから, $\text{Lie}(f): \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ は Lie 代数の全射準同型である. $T_G \subseteq G$ を Cartan 部分群とすると, $\text{Lie}(T_G)$ は $\text{Lie}(G)$ の Cartan 部分代数だから, $\text{Lie}(f)(\text{Lie}(T_G))$ は $\text{Lie}(H)$ の Cartan 部分代数である (補題 3.14). $f(T_G)$ は, $\text{Lie}(f)(\text{Lie}(T_G))$ を Lie 代数にもつ H の連結部分 Lie 群だから, H の Cartan 部分代数である.

任意の Cartan 部分群 $T_H \subseteq H$ が G のある Cartan 部分群の f による像として書けることを示す. Cartan 部分群 $T_G \subseteq G$ を一つ固定する. 前段の結果より $f(T_G)$ は H の Cartan 部分群だから, Cartan 部分群の共役性 (命題 2.4) より, ある $h \in H$ が存在して $hf(T_G)h^{-1} = T_H$ となる. f は全射だから $h = f(g)$ と書けて, $f(gT_Gg^{-1}) = T_H$ が成り立つ.

(2) f は全射だから, 任意の Cartan 部分群 $T_H \subseteq H$ に対して, $f(f^{-1}(T_H)) = T_H$ である. また, 任意の Cartan 部分群 $T_G \subseteq G$ に対して, $\text{Ker}(f) \subseteq \mathbf{Z}(G) \subseteq T_G$ だから (系 3.10), $f^{-1}(f(T_G)) = T_G$ である. これらのことと (1) より, 主張の一対一対応が成り立つ. $\square$

命題 3.16 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし, H をその閉部分群とする.

- (1) H の任意の Cartan 部分群 T_H に対して, G のある Cartan 部分群 T_G が存在して, $T_H = T_G \cap H$ と書ける.
- (2) H が G の閉正規部分群であるとする. このとき, G の任意の Cartan 部分群 T_G に対して, $T_G \cap H$ は H の Cartan 部分群である.

証明 (1) T_H は G の連結可換部分 Lie 群だから, それを含む Cartan 部分群 T_G が存在する (命題 2.5). $T_G \cap H$ は H の可換部分群であって T_H を含むが, T_H は H において極大可換だから (系 3.12), $T_H = T_G \cap H$ となる.

(2) $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T_G)$ と置く. $\mathfrak{h}$ は簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ (命題 1.2) のイデアルだから, その補イデアル $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ が存在して, Lie 代数としての直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ が成り立つ. $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数だから, 直和 Lie 代数の Cartan 部分代数に関する結果 (参照) より, $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の Cartan 部分代数である. $(T_G \cap H)_0$ は $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$ を Lie 代数にもつ H の連結部分 Lie 群だから, H の Cartan 部分群である. $T_G \cap H$ は H の可換部分群であって $(T_G \cap H)_0$ を含むが, $(T_G \cap H)_0$ は H において極大可換だから (系 3.12), $(T_G \cap H)_0 = T_G \cap H$ となる. よって, $T_G \cap H$ は H の Cartan 部分群である. $\square$

3.4 Cartan 部分群と準同型

命題 3.17 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群, H を Lie 群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ と置く. このとき, Lie 代数の準同型 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) ϕ の持ち上げ $f: G \rightarrow H$ が存在する.
 (b) $\phi|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げ $f_T: T \rightarrow H$ が存在する.

証明 (a) $\implies$ (b) $f: G \rightarrow H$ が ϕ の持ち上げならば, $f|_T$ は $\phi|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げである.

(b) $\implies$ (a) $(\tilde{G}, p)$ を G の普遍被覆 Lie 群とし, $\tilde{T}$ を $\tilde{G}$ の連結部分 Lie 群であって $\mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつものとする. $\tilde{T}$ は, $\tilde{G}$ の Cartan 部分群である.

$\tilde{G}$ は単連結だから, ϕ の持ち上げ $\tilde{f}: \tilde{G} \rightarrow H$ がとれる. ここで, $f_T: T \rightarrow H$ が $\phi|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げであるとする. $\tilde{T}$ は連結であり, $\text{Lie}(\tilde{f}|_{\tilde{T}}) = f|_{\mathfrak{t}} = \text{Lie}(f_T \circ p|_{\tilde{T}})$ だから, $\tilde{f}|_{\tilde{T}} = f_T \circ p|_{\tilde{T}}$ である. したがって,

$$\text{Ker}(\tilde{f}) \supseteq \text{Ker}(\tilde{f}|_{\tilde{T}}) = \text{Ker}(f_T \circ p|_{\tilde{T}}) \supseteq \text{Ker}(p|_{\tilde{T}}) = \text{Ker}(p)$$

である (最後の等号では, 補題 3.2 と系 3.10 より $\text{Ker}(p) \subseteq \mathbf{Z}(\tilde{G}) \subseteq \tilde{T}$ であることを用いた). よって, $\tilde{f}$ は Lie 群の準同型 $f: G \rightarrow H$ を誘導し, これが ϕ の持ち上げとなる. $\square$

命題 3.18 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, H を Lie 群とする. このとき, Lie 群の準同型 $f: G \rightarrow H$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) f は単射である.
 (b) $f|_T$ は単射である.

証明 G の任意の元は T のある元に共役だから (定理 3.8), G の正規部分群 N が自明であることと $N \cap T$ が自明であることは同値である. $N = \text{Ker}(f)$ とすれば, 主張の同値性を得る. $\square$

3.5 基本群と中心

G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とする. $(\text{Lie}(T), \exp_T)$ は T の普遍被覆 Lie 群だから (命題 2.1 (1)), 基本群 $\pi_1(T)$ は $\text{Ker}(\exp_T)$ に自然に同型である. この同型と, 包含準同型が誘導する $\pi_1(T)$ から $\pi_1(G)$ への準同型を合成することで, 準同型 $f_{G,T}: \text{Ker}(\exp_T) \rightarrow \pi_1(G)$ が得られる. 次の定理では, この記号を用いる.

定理 3.19 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く. このとき, 群準同型 $f_{G,T}: \text{Ker}(\exp_T) \rightarrow \pi_1(G)$ は全射で $\text{Ker}(f_{G,T}) = Q(2\pi i \Delta^\vee)$ を満たし, したがって, 群同型

$$\text{Ker}(\exp_T)/Q(2\pi i \Delta^\vee) \cong \pi_1(G)$$

を誘導する (命題 2.24 (2) より $Q(2\pi i \Delta^\vee) \subseteq \text{Ker}(\exp_T)$ であることに注意する).

証明 まず, G が単連結である場合を考える. このとき, $\pi_1(G) = 1$ だから, 示すべき主張は, $Q(2\pi i \Delta^\vee) = \text{Ker}(\exp_T)$ である. ルート系 Δ の基底 Π を一つ固定し, (Δ, Π) に関する優整ベクトルを単に優整ベクトルということにする. 分裂簡約 Lie 代数に対する最高ウェイト理論より, $\lambda \in P(\Delta)$ が優整ベクトルであれば, 有限次元既約 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V であって $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と Π に関して最高ウェイト λ をもつものが存在する. いま G は単連結だから, これは G の連続表現 (π, V) に持ち上がる. $h \in \mathfrak{t}$ はウェイト λ のウェイト空間 V_λ に $\lambda(h)$ 倍写像として作用するから, $\pi|_T$ は V_λ 上の 1 次元部分表現を定め, これが $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げとなる. したがって, $\lambda \in X(T)$ である. $P(\Delta)$ に属する優整ベクトルの全体は $P(\Delta)$ を加法群として生成するから, $P(\Delta) \subseteq X(T)$

を得る．このことと命題 2.18 と命題 2.21 より， $\text{Ker}(\exp_T) \subseteq Q(2\pi i\Delta^\vee)$ が成り立つ．これで，主張が示された．

次に，一般の場合を考える． $(\tilde{G}, p)$ を G の普遍被覆 Lie 群とし， $\tilde{T}$ を $\tilde{G}$ の連結部分 Lie 群であって $\mathfrak{t}$ を Lie 代数にもつものとする． $\tilde{T}$ は， $\tilde{G}$ の Cartan 部分群である． G の被覆 Lie 群 $(\tilde{G}, p)$ と T の被覆 Lie 群 $(\tilde{T}, p|_{\tilde{T}})$ のそれぞれから定まる完全列とその間の準同型，および自然な同型 $\pi_1(T) \cong \text{Ker}(\exp_T)$ と $\pi_1(\tilde{T}) \cong \text{Ker}(\exp_{\tilde{T}})$ から定まる，次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Ker}(\exp_{\tilde{T}}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\exp_T) & \longrightarrow & \text{Ker}(p|_{\tilde{T}}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow f_{\tilde{G}, \tilde{T}} & & \downarrow f_{G, T} & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{G}) & \longrightarrow & \pi_1(G) & \longrightarrow & \text{Ker}(p) \longrightarrow 1 \end{array}$$

前段の結果より $\text{Ker}(f_{\tilde{G}, \tilde{T}}) = Q(2\pi i\Delta^\vee)$ かつ $\text{Coker}(f_{\tilde{G}, \tilde{T}}) = 1$ であり， $\text{Ker}(p) \subseteq \mathbf{Z}(\tilde{G}) \subseteq \tilde{T}$ (補題 3.2, 系 3.10) より $\text{Ker}(p|_{\tilde{T}}) = \text{Ker}(p)$ である．したがって，上記の可換図式に蛇の補題を適用すれば，完全列

$$1 \longrightarrow Q(2\pi i\Delta^\vee) \longrightarrow \text{Ker}(f_{G, T}) \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow \text{Coker}(f_{G, T}) \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$$

を得る．よって， $\text{Ker}(f_{G, T}) = Q(2\pi i\Delta^\vee)$ かつ $\text{Coker}(f_{G, T}) = 1$ であり，主張が成り立つ． $\square$

系 3.20 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群， T をその Cartan 部分群とし， $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ， $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ ， $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く．このとき，次の条件は同値である．

- (a) G は単連結である．
- (b) $\text{Ker}(\exp_T) = Q(2\pi i\Delta^\vee)$ である．
- (c) $X(T) = P(\Delta)$ である．

証明 (a) $\iff$ (b) 定理 3.19 から従う．

(b) $\iff$ (c) 命題 2.18 と命題 2.21 から従う． $\square$

定理 3.21 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群， T をその Cartan 部分群とし， $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ， $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ ， $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く．このとき，群準同型 $\exp_T: \mathfrak{t} \rightarrow T$ は $\exp_T(P(2\pi i\Delta^\vee)) = \mathbf{Z}(G)$ を満たし，したがって，群同型

$$P(2\pi i\Delta^\vee)/\text{Ker}(\exp_T) \cong \mathbf{Z}(G)$$

を誘導する (命題 2.24 (2) より $\text{Ker}(\exp_T) \subseteq P(2\pi i\Delta^\vee)$ であることに注意する)．

証明 指数写像 $\exp_T: \mathfrak{t} \rightarrow T$ は全射であり，系 3.10 より $\mathbf{Z}(G) \subseteq T$ である．また， $h \in \mathfrak{t}$ に対して，

$$\begin{aligned} e^h \in \mathbf{Z}(G) &\iff G \text{ から自身への写像 } g \mapsto e^h g e^{-h} \text{ が恒等写像} \\ &\iff \text{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(e^h) = \text{id}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}} \\ &\iff \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して } e^{\alpha(h)} = 1 \\ &\iff \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \alpha(h) \in 2\pi i\mathbb{Z} \\ &\iff h \in P(2\pi i\Delta^\vee) \end{aligned}$$

である．ここで，第 3 の同値性は， $\text{Ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(e^h) = e^{\text{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}}(h)}$ が各ルート空間 $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})})_\alpha$ に $e^{\alpha(h)}$ 倍写像として作用することから従う．以上より，主張が成り立つ． $\square$

系 3.22 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く. このとき, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathbf{Z}(G) = 1$ である.
- (b) $\text{Ker}(\exp_T) = P(2\pi i \Delta^\vee)$ である.
- (c) $X(T) = Q(\Delta)$ である.

証明 (a) $\iff$ (b) 定理 3.21 から従う.

(b) $\iff$ (c) 命題 2.18 と命題 2.21 から従う. □

4 コンパクト Lie 群の表現

本節を通して, 群の表現は, 複素ベクトル空間上のものとする.

4.1 ウェイト

G を Lie 群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ と置く. (π, V) を G の有限次元連続表現とすると, その微分 $\text{Lie}(\pi)$ は, V に $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群の構造を定める. 以下, 特に断らなくても, この方法で V を $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群とみなす.

定義 4.1 (ウェイト) G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. (π, V) を G の有限次元連続表現とする. $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関するウェイト, ウェイトベクトル, ウェイト空間を, それぞれ, π の T に関する**ウェイト** (weight), **ウェイトベクトル** (weight vector), **ウェイト空間** (weight space) という. ウェイトの**重複度** (multiplicity) についても, 同様に定める.

命題 4.2 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. (π, V) を G の有限次元連続表現とする.

- (1) π の T に関する任意のウェイトは, $X_{\mathbb{C}}(T)$ に属する.
- (2) さらに, V が内積空間であり, π がユニタリ連続表現であるとする. このとき, π の T に関する任意のウェイトは, $X(T)$ に属する.

このとき, π の T に関する任意のウェイトは, T に関して積分可能である.

証明 (1) $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ を π の T に関するウェイトとし, 対応するウェイトベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ を一つ固定する. 任意の $h \in \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に対して $\text{Lie}(\pi)(h)v = \lambda(h)v$ だから, $\pi|_T$ は $\mathbb{C}v$ 上の 1 次元部分表現を定め, これが $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ の持ち上げとなる. よって, $\lambda \in X_{\mathbb{C}}(T)$ である.

(2) (1) の記号を用いる. π がユニタリ連続表現ならば, $\pi|_T$ が定める $\mathbb{C}v$ 上の 1 次元部分表現もユニタリである. よって, $\lambda \in X(T)$ である. □

定義 4.3 (ウェイト表現) G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群とし, T をその Cartan 部分群とする. G の有限次元連続表現 (π, V) は, V が T に関するウェイト空間の直和に分解されるとき, T に関する**ウェイト表現** (weight representation) であるという.

すなわち, G の有限次元連続表現 (π, V) が T に関するウェイト表現であるとは, $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関

するウェイト加群であるということである。

命題 4.4 G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. V をウェイト $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群とする.

- (1) $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が G の連続表現に持ち上がるための必要十分条件は, V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関するすべてのウェイトが $X_{\mathbb{C}}(T)$ に属することである.
- (2) $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が G のユニタリ化可能な連続表現に持ち上がるための必要十分条件は, V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関するすべてのウェイトが $X(T)$ に属することである.

証明 (1) 命題 3.17 より, $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が G の連続表現に持ち上がることは, $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が T の連続表現に持ち上がることと同値である. V はウェイト空間の直和に分解されるから, この条件は, 各ウェイト空間が T の連続表現に持ち上がることと同値である. すなわち, V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関するすべてのウェイトが $X_{\mathbb{C}}(T)$ に属することと同値である.

(2) 命題 3.17 より, $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が G のユニタリ化可能な連続表現に持ち上がることは, $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が T のユニタリ化可能な連続表現に持ち上がることと同値である. V はウェイト空間の直和に分解されるから, この条件は, 各ウェイト空間が T のユニタリ化可能な連続表現に持ち上がることと同値である. すなわち, V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ に関するすべてのウェイトが $X(T)$ に属することと同値である. $\square$

4.2 最高ウェイト表現

定義 4.5 (極大ベクトル) G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする. (π, V) を G の有限次元連続表現とする. $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V の $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と Π に関する極大ベクトルと極大生成ベクトルを, それぞれ, π の T と Π に関する**極大ベクトル** (maximal vector) と**極大生成ベクトル** (maximal generating vector) という.

定義 4.6 (最高ウェイト表現) G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ と置く. Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ の基底とする. (π, V) を G の有限次元連続表現とする. π が T と Π に関するウェイト $\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^*$ の極大生成ベクトルをもつとき, π は T と Π に関する**最高ウェイト λ の最高ウェイト表現** (highest weight representation of highest weight λ) であるという.

すなわち, G の有限次元連続表現 (π, V) が T と Π に関する最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であるとは, $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V が $\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})}$ と Π に関する最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であるということである.

4.3 最高ウェイト理論

$\mathfrak{g}$ をコンパクト Lie 代数, $\mathfrak{t}$ をその Cartan 部分代数とし, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く. Π をルート系 Δ の基底とする. このとき, (Δ, Π) に関する優整ベクトル全体のなす加法群を, $P_{+, \mathbb{C}}(\Delta, \Pi)$ と書く. すなわち,

$$P_{+, \mathbb{C}}(\Delta, \Pi) = \{\lambda \in (\mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})^* \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とする. 次の定理では, この記号を用いる.

定理 4.7 (最高ウェイト理論) G をコンパクトな Lie 代数をもつ連結 Lie 群, T をその Cartan 部分群とし,

$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}, \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})})$ と置く. Π をルート系 Δ の基底とする.

- (1) 任意の $\lambda \in P_{++,\mathbb{C}}(\Delta, \Pi) \cap X_{\mathbb{C}}(T)$ に対して, 最高ウェイト λ をもつ G の有限次元既約連続表現 (π_λ, V_λ) が, 同型を除いて一意に存在する. さらに, G の有限次元既約連続表現は, これらで同型を除いて尽くされる.
- (2) (1) の (π_λ, V_λ) がユニタリ化可能であるための必要十分条件は, $\lambda \in P_{++,\mathbb{C}}(\Delta, \Pi) \cap X(T)$ である.

証明 分裂簡約 Lie 代数に対する最高ウェイト理論より, 任意の $\lambda \in P_{++,\mathbb{C}}(\Delta, \Pi)$ に対して最高ウェイト λ をもつ有限次元既約 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群 V_λ が同型を除いて一意に存在し, 有限次元既約 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{C})}$ 加群はこれらで同型を除いて尽くされる. さらに, 命題 4.4 より,

$$\begin{aligned}
& V_\lambda \text{ が } G \text{ の連続表現に持ち上がる} \\
& \iff V_\lambda \text{ の } \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \text{ に関するすべてのウェイトが } X_{\mathbb{C}}(T) \text{ に属する} \\
& \iff \lambda \in X_{\mathbb{C}}(T), \\
& V_\lambda \text{ が } G \text{ のユニタリ化可能な連続表現に持ち上がる} \\
& \iff V_\lambda \text{ の } \mathfrak{t}_{(\mathbb{C})} \text{ に関するすべてのウェイトが } X(T) \text{ に属する} \\
& \iff \lambda \in X(T)
\end{aligned}$$

である. ここで, それぞれの最後の同値性は, V_λ のウェイト全体の集合が λ を含み $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ に含まれること (参照) と $\mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \subseteq Q(\Delta) \subseteq X(T) \subseteq X_{\mathbb{C}}(T)$ (命題 2.24) から従う. よって, 主張が成り立つ. $\square$

参考文献

- [1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9*, Springer, 2007.
- [2] A. W. Knap, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, 2002.