

Lie 代数

<https://socculus.com>

2026 年 8 月 15 日

概要

Lie 代数の基礎を解説する。Lie 代数に関する基本的な定義を行い、包絡代数と表現について見たあと、冪零 Lie 代数、可解 Lie 代数、半単純 Lie 代数の各クラスを定義し、その性質を解説する。

目次

記号と用語	2
1 Lie 代数	2
1.1 Lie 代数	2
1.2 随伴表現	4
1.3 イデアルと特性イデアル	5
1.4 中心化子と正規化子	6
2 包絡代数	7
2.1 包絡代数	7
2.2 Poincaré–Birkhoff–Witt の定理	7
3 表現	12
3.1 表現	12
3.2 表現に対する演算	13
3.3 既約表現	14
3.4 不変双線型形式	15
3.5 トレース形式, Killing 形式	16
3.6 Casimir 元	18
4 冪零 Lie 代数	19
4.1 冪零 Lie 代数	19
4.2 Engel の定理	20
5 可解 Lie 代数	22
5.1 可解 Lie 代数	22
5.2 根基	23

5.3	冪零根基	24
5.4	Lie の定理	26
5.5	可解性に関する Cartan の判定法	26
5.6	根基・冪零根基と係数体の変更	29
6	半単純 Lie 代数	30
6.1	単純 Lie 代数と半単純 Lie 代数	30
6.2	半単純性に関する Cartan の判定法	31
6.3	半単純 Lie 代数の分解	31
6.4	Weyl の完全可約性定理	33
6.5	簡約 Lie 代数	35
6.6	単純性・半単純性・簡約性と係数体の変更	36
6.7	半単純 Lie 代数の半単純元と冪零元	37
6.8	半単純 Lie 代数の例	40
	参考文献	42

記号と用語

- 本稿を通して、特に断らない限り、 $\mathbb{K}$ を可換体とし、ベクトル空間などの係数体は $\mathbb{K}$ であるとする。
- n 次単位行列を、 I_n と書く。添字の組 (i, j) に対応する行列単位を、 E_{ij} と書く。
- ベクトル空間 A が、 $A \times A$ から A への双線型写像を備えているとき、 A を結合的とは限らない代数という。結合的とは限らない代数 A に定まっている双線型写像を、この結合的とは限らない代数の乗法といい、特に断らなければ $(x, y) \mapsto xy$ と書く。
- 結合的とは限らない代数 A であって、その乗法が結合的である（すなわち、任意の $x, y, z \in A$ に対して $(xy)z = x(yz)$ である）ものを、結合代数という。
- 結合的とは限らない代数 A 上の導分とは、線型写像 $D: A \rightarrow A$ であって、任意の $x, y \in A$ に対して $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ を満たすものをいう。 A 上の導分全体のなす空間を、 $\text{Der}(A)$ と書く。
- ベクトル空間 V のテンソル代数を $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^n(V)$ と書き、対称代数を $\mathbf{S}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{S}^n(V)$ と書く。各整数 $n \geq -1$ に対して、 $\mathbf{T}^{\leq n}(V) = \bigoplus_{m=0}^n \mathbf{T}^m(V)$, $\mathbf{S}^{\leq n}(V) = \bigoplus_{m=0}^n \mathbf{S}^m(V)$ と書く ($\mathbf{T}^{\leq n}(V) = 0$, $\mathbf{S}^{\leq n}(V) = 0$ である)。

1 Lie 代数

1.1 Lie 代数

定義 1.1 (Lie 代数) 結合的とは限らない $\mathbb{K}$ 代数 $\mathfrak{g}$ であって、その乗法 $((x, y) \mapsto [x, y])$ と書く) が次の条件を満たすものを、 $\mathbb{K}$ 上の **Lie 代数** (Lie algebra over $\mathbb{K}$)、 $\mathbb{K}$ -**Lie 代数**、あるいは単に **Lie 代数** という。

(LIE1) 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して、 $[x, x] = 0$ である。

(LIE2) 任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して、 $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ である (この等式を、**Jacobi の**

恒等式という).

注意 1.2 A を結合的とは限らない代数とする. 任意の $x \in A$ に対して $xx = 0$ ならば, 任意の $x, y \in A$ に対して,

$$0 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = xy + yx$$

だから, $yx = -xy$ である. 逆に, 係数体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 でなく, 任意の $x, y \in A$ に対して $yx = -xy$ ならば, 任意の $x \in A$ に対して, $xx = -xx$ より $xx = 0$ を得る.

前段に述べたことより, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は次の条件 (LIE1') を満たし, 係数体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 でなければ, Lie 代数の定義 (定義 1.1) において (LIE1) を (LIE1') に置き換えてもよい.

(LIE1') 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して, $[y, x] = -[x, y]$ である.

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ は, ふたたび Lie 代数である. このようにして得られる Lie 代数を, $\mathfrak{g}$ の **部分 Lie 代数** (Lie subalgebra) という.

(LIE1') より, Lie 代数において左イデアル, 右イデアル, 両側イデアルは同じものだから, これらを単にイデアルという. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ から定まる商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は, ふたたび Lie 代数である. このようにして得られる Lie 代数を, $\mathfrak{g}$ の **商 Lie 代数** (quotient Lie algebra) という.

Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に対して, その直和代数 $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と積代数 $\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ は, ふたたび Lie 代数をなす. これらをそれぞれ, $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の **直和 Lie 代数** (direct sum Lie algebra), **積 Lie 代数** (product Lie algebra) という.

Lie 代数の間の代数の準同型・同型を, それぞれ **Lie 代数の準同型・同型** という. Lie 代数の構造を考えていることが明らかである場合には, 単に準同型・同型ともいう. $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を Lie 代数とし, $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を Lie 代数の準同型とする. $\text{Ker}(f)$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル, $\text{Im}(f)$ は $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数であり, f は $\mathfrak{g}/\text{Ker}(f)$ から $\text{Im}(f)$ への Lie 代数の同型を誘導する. $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数・イデアルならば, それぞれの場合, $f(\mathfrak{a})$ は $\text{Im}(f)$ の部分 Lie 代数・イデアルである. $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数・イデアルならば, それぞれの場合, $f^{-1}(\mathfrak{b})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数・イデアルである.

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ をその部分 Lie 代数の族とする. 包含準同型の全体が誘導する直和 Lie 代数 $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ から $\mathfrak{g}$ への線型写像が Lie 代数の同型であるとき, $\mathfrak{g}$ は Lie 代数として $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に直和分解されるといい, しばしば $\mathfrak{g}$ と $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ を Lie 代数として同一視する. 容易に確かめられるように, $\mathfrak{g}$ が Lie 代数として $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に直和分解されるための必要十分条件は, $\mathfrak{g}$ がベクトル空間として $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ に直和分解され, すべての $\mathfrak{g}_i$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることである.

$\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とする. $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ は, $\mathbb{K}'$ -Lie 代数である. $\mathbb{K}'$ -Lie 代数の係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ は, $\mathbb{K}$ -Lie 代数である.

定義 1.3 (可換 Lie 代数) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $x, y \in \mathfrak{g}$ が $[x, y] = 0$ を満たすとき, x と y は **可換**である (commute) という. $\mathfrak{g}$ が **可換** (commutative) であるとは, $\mathfrak{g}$ の任意の 2 元が可換であることをいう.

例 1.4 A を結合代数とする. $x, y \in A$ に対して, $[x, y] = xy - yx$ を x と y の **交換子** (commutator) といい, 容易に確かめられるように, A はこれを乘法として Lie 代数をなす. x と y が結合代数 A の乘法に関して可換であることと, A を交換子によって Lie 代数とみなすときに定義 1.3 の意味で可換であることは同値である.

例 1.5 V をベクトル空間とする.

- (1) V 上の線型変換全体のなす結合代数 $\text{End}(V)$ を交換子によって Lie 代数とみなしたものを, $\mathfrak{gl}(V)$ と書く. これを, **一般線型 Lie 代数** (general linear Lie algebra) という. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathfrak{gl}(\mathbb{K}^n)$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く.
- (2) V が有限次元であるとする. このとき, 容易に確かめられるように,

$$\mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{tr}(x) = 0\}$$

は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である. これを, **特殊線型 Lie 代数** (special linear Lie algebra) という. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathfrak{sl}(\mathbb{K}^n)$ を $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ と書く.

例 1.6 V をベクトル空間とし, $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を双線型形式とする. このとき, 容易に確かめられるように,

$$\mathfrak{g}_\Phi = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{任意の } v, w \in V \text{ に対して } \Phi(x(v), w) + \Phi(v, x(w)) = 0\}$$

は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である.

- (1) V が有限次元ベクトル空間であり, $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ が非退化対称双線型形式であるとする. このとき, 上記の $\mathfrak{g}_\Phi$ を, **直交 Lie 代数** (orthogonal Lie algebra) といい, $\mathfrak{o}(V, \Phi)$ と書く. Φ を $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 上の標準的な非退化対称双線型形式 (すなわち, $v = (v_1, \dots, v_n)$ と $w = (w_1, \dots, w_n)$ に対して $\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ として定まるもの) とするときの直交 Lie 代数 $\mathfrak{o}(\mathbb{K}^n, \Phi)$ を, $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ と書く. 行列のなす Lie 代数として表示すれば,

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}$$

となる.

- (2) V が有限次元ベクトル空間であり, $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ が非退化交代双線型形式であるとする. このとき, 上記の $\mathfrak{g}_\Phi$ を, **シンプレクティック Lie 代数** (symplectic Lie algebra) といい, $\mathfrak{sp}(V, \Phi)$ と書く. Φ を $\mathbb{K}^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) 上の標準的な非退化交代双線型形式 (すなわち, $v = (v_1, \dots, v_{2n})$ と $w = (w_1, \dots, w_{2n})$ に対して $\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_{n+i} - \sum_{i=1}^n v_{n+i} w_i$ として定まるもの) とするときのシンプレクティック Lie 代数 $\mathfrak{sp}(\mathbb{K}^{2n}, \Phi)$ を, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と書く. 行列のなす Lie 代数として表示すれば,

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid J_n X + X^T J_n = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), B, C \in \text{Sym}(n, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

($J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$) であり, $\text{Sym}(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の n 次対称行列全体のなす空間を表す) となる.

例 1.7 A を結合的とは限らない代数とすると, 容易に確かめられるように, A 上の導分全体のなす空間 $\text{Der}(A)$ は, $\mathfrak{gl}(A)$ の部分 Lie 代数である.

1.2 随伴表現

定義 1.8 (随伴表現) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 x に対して, $\mathfrak{g}$ から自身への線型写像 $y \mapsto [x, y]$ を, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ あるいは単に $\text{ad}(x)$ と書く.

命題 1.9 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ 上の導分全体のなす空間 $\text{Der}(\mathfrak{g})$ を, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数として Lie 代数とみなす (例 1.7).

- (1) $\text{ad}(\mathfrak{g})$ は $\text{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルである. さらに, $x \in \mathfrak{g}$ と $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ に対して, $\text{ad}(D(x)) = [D, \text{ad}(x)]$ である.
- (2) 写像 $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$ は準同型である.

証明 (1) $x \in \mathfrak{g}$ とすると, 任意の $y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\text{ad}(x)[y, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [\text{ad}(x)y, z] + [y, \text{ad}(x)z]$$

が成り立つから, $\text{ad}(x)$ は $\mathfrak{g}$ 上の導分である. さらに, $x \in \mathfrak{g}$ とし, D を $\mathfrak{g}$ 上の導分とすると, 任意の $y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\text{ad}(D(x))y = [D(x), y] = D([x, y]) - [x, D(y)] = D(\text{ad}(x)y) - \text{ad}(x)D(y)$$

が成り立つから, $\text{ad}(D(x)) = [D, \text{ad}(x)]$ である. よって, $\text{ad}(\mathfrak{g})$ は $\text{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルである.

- (2) $x, y \in \mathfrak{g}$ とすると, 任意の $z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\text{ad}([x, y])z = [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = \text{ad}(x)\text{ad}(y)z - \text{ad}(y)\text{ad}(x)z$$

が成り立つから, $\text{ad}([x, y]) = [\text{ad}(x), \text{ad}(y)]$ である. よって, ad は準同型である. □

定義 1.10 (内部導分) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $\text{ad}(\mathfrak{g})$ の元を, $\mathfrak{g}$ 上の**内部導分** (inner derivation) という.

命題 1.9 (1) より, Lie 代数上の内部導分は, 導分である.

1.3 イデアルと特性イデアル

Lie 代数のイデアルとは, 任意の内部導分で安定な部分ベクトル空間のことにほかならない. これを踏まえて, 次のように定義する.

定義 1.11 (特性イデアル) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間であって, $\mathfrak{g}$ 上の任意の導分で安定であるものを, $\mathfrak{g}$ の**特性イデアル** (characteristic ideal) という.

命題 1.12 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間, $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}$ の部分ベクトル空間とする.

- (1) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の特性イデアルならば, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.
- (2) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルであり, $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の特性イデアルならば, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである.

証明 (1) D を $\mathfrak{g}$ 上の内部導分とすると, $\mathfrak{a}$ は D 安定であり, $D|_{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ 上の導分だから, $\mathfrak{b}$ も D 安定である. よって, $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

- (2) (1) の証明において「内部導分」を「導分」に置き換えれば, (2) の証明となる. □

命題 1.13 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ をその部分ベクトル空間とする.

- (1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである.
- (2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである.

証明 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ 上の導分 D で安定ならば,

$$D([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) \subseteq [D(\mathfrak{a}), \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, D(\mathfrak{b})] \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$$

だから, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も D 安定である. よって, 主張が成り立つ. $\square$

1.4 中心化子と正規化子

定義 1.14 (中心化子, 中心) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合とすると, $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{h}$ における**中心化子** (centralizer) を,

$$\mathbf{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{h} \mid \text{任意の } y \in \mathfrak{a} \text{ に対して } [x, y] = 0\}$$

と定める. $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ における中心化子を, $\mathfrak{g}$ の**中心** (center) といい, $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ と書く.

定義 1.15 (正規化子) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $\mathfrak{h}, \mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間とすると, $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{h}$ における**正規化子** (normalizer) を,

$$\mathbf{N}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{h} \mid [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}$$

と定める.

命題 1.16 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間とし, $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{b}\}$ と置く.

- (1) $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ならば, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である.
- (2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば, $\mathfrak{h}$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである.
- (3) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば, $\mathfrak{h}$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである.

証明 (1) $x, y \in \mathfrak{h}$ とすると, 命題 1.9 (2) より

$$\begin{aligned} \text{ad}([x, y])\mathfrak{a} &\subseteq \text{ad}(x)\text{ad}(y)\mathfrak{a} + \text{ad}(y)\text{ad}(x)\mathfrak{a} \\ &\subseteq \text{ad}(x)\mathfrak{b} + \text{ad}(y)\mathfrak{b} \\ &\subseteq \text{ad}(x)\mathfrak{a} + \text{ad}(y)\mathfrak{a} \\ &\subseteq \mathfrak{b} \end{aligned}$$

だから, $[x, y] \in \mathfrak{h}$ である. よって, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である.

(2) $x \in \mathfrak{h}$ とし, D を $\mathfrak{g}$ 上の内部導分とすると, 命題 1.9 (1) より

$$\begin{aligned} \text{ad}(D(x))\mathfrak{a} &\subseteq D(\text{ad}(x)\mathfrak{a}) + \text{ad}(x)D(\mathfrak{a}) \\ &\subseteq D(\mathfrak{b}) + \text{ad}(x)\mathfrak{a} \\ &\subseteq \mathfrak{b} \end{aligned}$$

だから, $D(x) \in \mathfrak{h}$ である. よって, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

(3) (2) の証明において「内部導分」を「導分」に置き換えれば, (3) の証明となる. $\square$

系 1.17 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をその部分ベクトル空間とする.

- (1) $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}), \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である.
- (2) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば, $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}), \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

(3) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば, $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}), \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである.

証明 命題 1.16 の特別な場合である. □

系 1.18 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ に対して, その正規化子 $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は, $\mathfrak{a}$ をイデアルとして含む $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の中で最大のものである.

証明 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることより $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ を含み, 系 1.17 (1) より $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である. $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ が $\mathfrak{a}$ をイデアルとして含むこと, および同じ性質を満たす $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数が $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ に含まれることは, 正規化子の定義から明らかである. □

2 包絡代数

2.1 包絡代数

定義 2.1 (包絡代数) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. テンソル代数 $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ を「 $x, y \in \mathfrak{g}$ に対する $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ の全体が生成するイデアル」で割って得られる単位的結合代数を, $\mathfrak{g}$ の**包絡代数** (enveloping algebra) といひ, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く.

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\pi: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を等化準同型とする. $\mathfrak{g}$ から $\mathbf{T}(\mathfrak{g})$ への自然な写像と $\pi: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ とを合成して得られる写像 $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を, 包絡代数への**自然な写像**という. また, 各整数 $n \geq -1$ に対して, $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) = \pi(\mathbf{T}^{\leq n}(\mathfrak{g}))$ と書く ($\mathbf{U}^{\leq -1}(\mathfrak{g}) = 0$ である).

命題 2.2 (包絡代数の普遍性) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, その包絡代数への自然な写像を $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く. 単位的結合代数 A と (A を交換子によって Lie 代数とみなすときの) Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow A$ に対して, 単位的代数の準同型 $\tilde{f}: \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ であって, $\tilde{f} \circ \iota = f$ を満たすものが一意に存在する.

証明 テンソル代数の普遍性より, 単位的代数の準同型 $\hat{f}: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ であって, 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\hat{f}(x) = f(x)$ を満たすものが一意に存在する. f は Lie 代数の準同型だから, 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $\hat{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x, y]) = 0$ が成り立つ. したがって, $\hat{f}$ は単位的代数の準同型 $\tilde{f}: \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ を誘導する. これが, 主張の条件を満たす一意な単位的代数の準同型である. □

系 2.3 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を Lie 代数とし, それらの包絡代数への自然な写像を $\iota_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g}), \iota_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ と書く. Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ に対して, 単位的代数の準同型 $\tilde{f}: \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ であって, $\tilde{f} \circ \iota_{\mathfrak{g}} = \iota_{\mathfrak{h}} \circ f$ を満たすものが一意に存在する.

証明 包絡代数の普遍性 (命題 2.2) から従う. □

命題 2.2 または系 2.3 の状況で, $\tilde{f}$ を, f が誘導する**単位的代数の準同型**という.

2.2 Poincaré–Birkhoff–Witt の定理

本小節では, I を集合とするとき, 各整数 $n \geq -1$ に対して $I^{\leq n} = \coprod_{m=0}^n I^m$ と書き ($I^{\leq -1} = \emptyset$ である), $I^* = \coprod_{m=0}^{\infty} I^m$ と書く. また, I を全順序集合とするとき, $I^n, I^{\leq n}, I^*$ に属する列のうち昇順であるもの全体のなす集合を, それぞれ $I_{\uparrow}^n, I_{\uparrow}^{\leq n}, I_{\uparrow}^*$ と書く.

定理 2.4 (Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 I) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、その包絡代数への自然な写像を $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く. $(x_i)_{i \in I}$ を全順序集合 I で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底とし、 $\Sigma = (i_1, \dots, i_n) \in I^*$ に対して

$$x_\Sigma = \iota(x_{i_1}) \cdots \iota(x_{i_n}) \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$$

と置く.

- (1) 各整数 $n \geq -1$ に対して、 $(x_\Sigma)_{\Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n}}$ は $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g})$ の基底である.
- (2) $(x_\Sigma)_{\Sigma \in I_{\uparrow}^*}$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底である.

証明 各整数 $n \geq -1$ に対して $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_\Sigma \mid \Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n}\}$ であることを、 n に関する帰納法で示す. $(x_i)_{i \in I}$ は $\mathfrak{g}$ の基底だから、 $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_T \mid T \in I^{\leq n}\}$ である. したがって、任意の $T \in I^{\leq n}$ に対して $x_T \in \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_\Sigma \mid \Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n}\}$ を示せばよい. T が長さ n 未満のときは帰納法の仮定から従うから、 T が長さ n のときを考える. $T = (i_1, \dots, i_n)$ として、

$$\text{inv}(T) = \#\{m \in \{1, \dots, n-1\} \mid i_m > i_{m+1}\}$$

と定める. $\text{inv}(T) > 0$ ならば、 $i_m > i_{m+1}$ を満たす m がとれる. T において i_m と i_{m+1} を入れ替えたものを T' と置くと、 $\text{inv}(T') = \text{inv}(T) - 1$ かつ

$$x_T = x_{T'} + \iota(x_{i_1}) \cdots \iota(x_{i_{m-1}}) \iota([x_{i_m}, x_{i_{m+1}}]) \iota(x_{i_{m+2}}) \cdots \iota(x_{i_n})$$

であり、帰納法の仮定より上式の右辺第 2 項は $\text{span}_{\mathbb{K}}\{x_\Sigma \mid \Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n-1}\}$ に含まれるから、 $x_T \in \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_\Sigma \mid \Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n}\}$ をいうためには $x_{T'} \in \text{span}_{\mathbb{K}}\{x_\Sigma \mid \Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n}\}$ をいえばよい. これを繰り返すことにより、 $\text{inv}(T) = 0$ の場合に帰着されるが、このとき T は昇順であり、主張は明らかである. これで、帰納法が完成した.

$(x_\Sigma)_{\Sigma \in I_{\uparrow}^*}$ が線型独立であることを示す. そのために、Lie 代数の準同型 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}(\mathfrak{g}))$ であって、これが誘導する単位的代数の準同型をそのまま $\rho: \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}(\mathfrak{g}))$ と書くとき^{*1}、 $(\rho(x_\Sigma))_{\Sigma \in I_{\uparrow}^*}$ が線型独立となるものを構成する. 以下では、次の記号を用いる.

- $\Sigma = (i_1, \dots, i_n) \in I^n$ に対して、 $z_\Sigma = x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in \mathbf{S}^n(\mathfrak{g})$ と書く.
- $i \in I$ と $\Sigma = (i_1, \dots, i_n) \in I^n$ に対して、任意の $m \in \{1, \dots, n\}$ に対して $i \leq i_m$ であることを、 $i \leq \Sigma$ と書く.

主張 2.5 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、次の条件を満たす線型写像 $\rho_n: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{\leq n}(\mathfrak{g}), \mathbf{S}(\mathfrak{g}))$ が一意に存在する.

- (A_n) 任意の $i \in I$ と $\Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n}$ に対して、 $i \leq \Sigma$ ならば $\rho_n(x_i)z_\Sigma = z_i z_\Sigma$ である.
- (B_n) 任意の $m \leq n$ 、 $i \in I$ 、 $\Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq m}$ に対して、 $\rho_n(x_i)z_\Sigma \equiv z_i z_\Sigma \pmod{\mathbf{S}^{\leq m}(\mathfrak{g})}$ である.
- (C_n) 任意の $i, j \in I$ と $\Sigma \in I_{\uparrow}^{\leq n-1}$ に対して、 $\rho_n([x_i, x_j])z_\Sigma = \rho_n(x_i)\rho_n(x_j)z_\Sigma - \rho_n(x_j)\rho_n(x_i)z_\Sigma$ ((B_n) より $\rho_n(x_j)z_\Sigma, \rho_n(x_i)z_\Sigma \in \mathbf{S}^{\leq n}(\mathfrak{g})$ だから右辺が定義されることに注意する) である.

この主張が示されれば、一意性より $n \in \mathbb{N}$ に対する ρ_n の全体は線型写像 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}(\mathfrak{g}))$ を定め、条件 (C_n) より ρ は Lie 代数の準同型となる. これが誘導する単位的代数の準同型をそのまま $\rho: \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}(\mathfrak{g}))$ と書くと、 $\Sigma = (i_1, \dots, i_n) \in I_{\uparrow}^*$ に対して、条件 (A_n) より

$$\rho(x_\Sigma) = \rho(x_{i_1}) \cdots \rho(x_{i_n})1 = x_{i_1} \cdots x_{i_n} = z_\Sigma$$

^{*1} すなわち、 ρ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ 上の表現 (定義 3.1) であり、対応する $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の表現を同じ記号で表す (注意 3.2).

となり、これらは線型独立だから、 $\rho(x_\Sigma)$ の全体も線型独立となる。

主張 2.5 の証明 n に関する帰納法で示す。 $n = 0$ のときは明らかである。 $n \geq 1$ とし、条件を満たす ρ_{n-1} が一意に存在するとして、条件を満たす ρ_n が一意に存在することを示す。

まず、条件を満たす ρ_n の一意性を示す。 ρ_{n-1} の一意性より、

$$\rho_n(x)|_{\mathbf{S}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})} = \rho_{n-1}(x) \quad (x \in \mathfrak{g}) \quad (*)$$

である。 また、 $i \in I$ と $\Sigma \in I_\uparrow^n$ に対する $\rho_n(x_i)z_\Sigma \in \mathbf{S}(\mathfrak{g})$ は、次のように一意に定まる。

- $i \leq \Sigma$ の場合、条件 (A_n) より

$$\rho(x_i)z_\Sigma = z_i z_\Sigma \quad (**)$$

である。

- それ以外の場合、 $\Sigma = (j, \Sigma')$ ($j \in I$, $\Sigma' \in I^{n-1}$) と書けば、 $i > j$ かつ $j \leq \Sigma'$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \rho_n(x_i)z_\Sigma &= \rho_n(x_i)z_j z_{\Sigma'} \\ &= \rho_n(x_i)\rho_n(x_j)z_{\Sigma'} && (A_n) \text{ による} \\ &= \rho_n(x_j)\rho_n(x_i)z_{\Sigma'} + \rho_n([x_i, x_j])z_{\Sigma'} && (C_n) \text{ による} \\ &= \rho_n(x_j)\rho_{n-1}(x_i)z_{\Sigma'} + \rho_{n-1}([x_i, x_j])z_{\Sigma'} && (*) \text{ による} \end{aligned}$$

となる。さらに、条件 (B_{n-1}) より $\rho_{n-1}(x_i)z_{\Sigma'} = z_i z_{\Sigma'} + w$ ($w \in \mathbf{S}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$) と書けるから、

$$\begin{aligned} \rho_n(x_j)\rho_{n-1}(x_i)z_{\Sigma'} &= \rho_n(x_j)(z_i z_{\Sigma'} + w) && (A_n) \text{ による} \\ &= z_j z_i z_{\Sigma'} + \rho_{n-1}(x_j)w && (*) \text{ による} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\rho_n(x_i)z_\Sigma = z_j z_i z_{\Sigma'} + \rho_{n-1}(x_j)w + \rho_{n-1}([x_i, x_j])z_{\Sigma'} \quad (***)$$

である。

これで、一意性が示された。

次に、 $i \in I$ と $\Sigma \in I_\uparrow^{\leq n}$ に対して $(*)$, $(**)$, $(***)$ によって $\rho_n(x_i)z_\Sigma \in \mathbf{S}(\mathfrak{g})$ を定めることにより線型写像 $\rho_n: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}^{\leq n}(\mathfrak{g}), \mathbf{S}(\mathfrak{g}))$ を定義すると、これは主張の条件を満たすことを示す。条件 (A_n) と (B_n) を満たすことは明らかだから、条件 (C_n) を満たすことを示す。以下、簡単のため、 $\rho_n(x)z$ の代わりに xz と書く。任意の $i, j \in I$ と $\Sigma \in I^{\leq n-1}$ に対して、

$$[x_i, x_j]z_\Sigma = x_i x_j z_\Sigma - x_j x_i z_\Sigma \quad (****)$$

を示したい。

- (I) $\Sigma \in I^{\leq n-2}$ の場合、 $(****)$ は定義 $(*)$ と (C_{n-1}) から従う。
- (II) $\Sigma \in I^{n-1}$ とする。 $i = j$ の場合、 $(****)$ は明らかである。
- (III) $\Sigma \in I^{n-1}$ とする。 $i > j$ かつ $j \leq \Sigma$ の場合、定義 $(*)$ と (B_{n-1}) より $x_i z_\Sigma = z_i z_\Sigma + w$ ($w \in \mathbf{S}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$) と書け、

$$\begin{aligned} x_i x_j z_\Sigma &= x_i z_j z_\Sigma && \text{定義 } (*) \text{ と } (A_{n-1}) \text{ による} \\ &= z_j z_i z_\Sigma + x_j w + [x_i, x_j]z_\Sigma && \text{定義 } (***) \text{ による} \\ &= x_j z_i z_\Sigma + x_j w + [x_i, x_j]z_\Sigma && \text{定義 } (**) \text{ による} \\ &= x_j x_i z_\Sigma \end{aligned}$$

となる．よって, (****) が成り立つ．

(IV) $\Sigma \in I^{n-1}$ とする． $i < j$ かつ $i \leq \Sigma$ の場合は, $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ より, (III) に帰着される．

(V) $\Sigma \in I^{n-1}$ とする． 上記 (II), (III), (IV) 以外の場合, $\Sigma = (k, \Sigma')$ ($k \in I, \Sigma' \in I^{n-2}$) と書けば, $i, j > k$ かつ $k \leq \Sigma'$ である． 定義 (*) と (B_{n-1}) より, $x_j z_{\Sigma'} = z_j z_{\Sigma'} + w'$ ($w' \in \mathbf{S}^{\leq n-2}(\mathfrak{g})$) と書ける． (III) より

$$x_i x_k z_j z_{\Sigma'} - x_k x_i z_j z_{\Sigma'} = [x_i, x_k] z_j z_{\Sigma'}$$

であり, (II) より

$$x_i x_k w' - x_k x_i w' = [x_i, x_k] w'$$

だから, これらを辺々足して

$$x_i x_k x_j z_{\Sigma'} - x_k x_i x_j z_{\Sigma'} = [x_i, x_k] x_j z_{\Sigma'} \quad (*****)$$

を得る．したがって,

$$\begin{aligned} x_i x_j z_{\Sigma} &= x_i x_j x_k z_{\Sigma'} && \text{定義 (*) と } (A_{n-1}) \text{ による} \\ &= x_i x_k x_j z_{\Sigma'} + x_i [x_j, x_k] z_{\Sigma'} && \text{(II) による} \\ &= x_i x_k x_j z_{\Sigma'} + [x_j, x_k] x_i z_{\Sigma'} + [x_i, [x_j, x_k]] z_{\Sigma'} && \text{(II) による} \\ &= x_k x_i x_j z_{\Sigma'} + [x_i, x_k] x_j z_{\Sigma'} + [x_j, x_k] x_i z_{\Sigma'} + [x_i, [x_j, x_k]] z_{\Sigma'} && (*****) \text{ による} \end{aligned}$$

である．いま, i と j に対する仮定は対称的だから, 上式で i と j を入れ替えた式

$$x_j x_i z_{\Sigma} = x_k x_j x_i z_{\Sigma'} + [x_j, x_k] x_i z_{\Sigma'} + [x_i, x_k] x_j z_{\Sigma'} + [x_j, [x_i, x_k]] z_{\Sigma'}$$

も成り立つ．これらの 2 式を辺々引いて,

$$\begin{aligned} x_i x_j z_{\Sigma} - x_j x_i z_{\Sigma} &= x_k (x_i x_j z_{\Sigma'} - x_j x_i z_{\Sigma'}) + ([x_i, [x_j, x_k]] - [x_j, [x_i, x_k]]) z_{\Sigma'} \\ &= x_k [x_i, x_j] z_{\Sigma'} + ([x_i, [x_j, x_k]] - [x_j, [x_i, x_k]]) z_{\Sigma'} && \text{(II) による} \\ &= [x_i, x_j] x_k z_{\Sigma'} + ([x_k, [x_i, x_j]] + [x_i, [x_j, x_k]] - [x_j, [x_i, x_k]]) z_{\Sigma'} && \text{(II) による} \\ &= [x_i, x_j] x_k z_{\Sigma'} \\ &= [x_i, x_j] z_{\Sigma} && \text{定義 (*) と } (A_{n-1}) \text{ による} \end{aligned}$$

を得る．よって, (****) が成り立つ．

これで, 存在が示された. //

これで, $(x_{\Sigma})_{\Sigma \in I_{\dagger}^*}$ が線型独立であることが示された. □

Poincaré–Birkhoff–Witt の定理の基底によらない定式化を述べるため, 用語を準備する．単位的結合代数 A 上の **フィルトレーション** (filtration) とは, A の部分ベクトル空間の増加列 $(A^{\leq n})_{n \in \mathbb{N}}$ であって, $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^{\leq n} = A$ であり, $1 \in A^{\leq 0}$ かつ任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $A^{\leq m} A^{\leq n} \subseteq A^{\leq m+n}$ を満たすものをいう．単位的結合代数とその上のフィルトレーションの組を, **フィルトレーション付き単位的結合代数** (filtered unital associative algebra) という． $(A, (A^{\leq n})_{n \in \mathbb{N}})$ をフィルトレーション付き結合代数とすると,

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^{\leq n} / A^{\leq n-1}$$

($A^{\leq -1} = 0$ とみなす) と定めると, A の乗法は $\text{gr}(A) \times \text{gr}(A)$ から $\text{gr}(A)$ への双線型写像を誘導し, これを乗法として, $\text{gr}(A)$ は次数付き単位的結合代数をなす. これを, A に伴う次数付き単位的結合代数という.

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とすると, $(\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{N}}$ は包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上のフィルトレーションである. 次の定理では, フィルトレーション付き単位的結合代数 $(\mathbf{U}(\mathfrak{g}), (\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{N}})$ に伴う次数付き単位的結合代数

$$\text{gr}(\mathbf{U}(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) / \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$$

を考える.

定理 2.6 (Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 II) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, テンソル代数から包絡代数への等化準同型を $\pi: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く. 線型写像 $\tilde{\Phi} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Phi}_n: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ を

$$\tilde{\Phi}_n: \mathbf{T}^n(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) / \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g}), \quad \tilde{\Phi}_n(t) = \pi(t) + \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$$

によって定めると, $\tilde{\Phi}$ は次数付き単位的代数の準同型であり, 次数付き単位的代数の同型

$$\Phi: \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$$

を誘導する.

証明 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ からその包絡代数への自然な写像を $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ と書く. $\tilde{\Phi}(1) = 1$ であり, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ と $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_m(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \tilde{\Phi}_n(y_1 \otimes \dots \otimes y_n) &= (\iota(x_1) \dots \iota(x_m) + \mathbf{U}^{\leq m-1}(\mathfrak{g}))(\iota(y_1) \dots \iota(y_n) + \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})) \\ &= \iota(x_1) \dots \iota(x_m) \iota(y_1) \dots \iota(y_n) + \mathbf{U}^{\leq m+n-1}(\mathfrak{g}) \\ &= \tilde{\Phi}_{m+n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_n) \end{aligned}$$

だから, $\tilde{\Phi} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Phi}_n: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ は次数付き単位的代数の準同型である. さらに, 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x \otimes y - y \otimes x) &= \iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x) + \mathbf{U}^{\leq 1}(\mathfrak{g}) \\ &= \iota([x, y]) + \mathbf{U}^{\leq 1}(\mathfrak{g}) \\ &= 0 + \mathbf{U}^{\leq 1}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

だから, $\tilde{\Phi}$ は次数付き単位的代数の準同型 $\Phi: \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ を誘導する. あとは, Φ が線型同型であることを示せばよい.

全順序集合で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底 $(x_i)_{i \in I}$ をとる. $n \in \mathbb{N}$ とすると, $(i_1, \dots, i_n) \in I_{\uparrow}^n$ に対する $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ の全体は $\mathbf{S}^n(\mathfrak{g})$ の基底をなす. 一方で, 定理 2.4 (1) より, $(i_1, \dots, i_n) \in I_{\uparrow}^n$ に対する $\iota(x_{i_1}) \dots \iota(x_{i_n}) + \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$ の全体は $\mathbf{U}^{\leq n}(\mathfrak{g}) / \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$ の基底をなす. Φ は, 各 $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ を $\iota(x_{i_1}) \dots \iota(x_{i_n}) + \mathbf{U}^{\leq n-1}(\mathfrak{g})$ に移すから, 線型同型である. $\square$

系 2.7 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ からその包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ への自然な写像 $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ は, 単射である.

証明 全順序集合で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底 $(x_i)_{i \in I}$ をとる. Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 (定理 2.4) より, $(\iota(x_i))_{i \in I}$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ において線型独立だから, 自然な写像 $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ は単射である. $\square$

系 2.7 を踏まえて、 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とすると、包絡代数への自然な写像による $x \in \mathfrak{g}$ の像を、しばしばそのまま x と書く。

系 2.8 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の間の単射準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ が誘導する包絡代数の間の単位的代数の準同型 $\tilde{f}: \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{h})$ は、単射である。

証明 全順序集合で添字付けられた $\mathfrak{g}$ の基底 $(x_i)_{i \in I}$ をとる。さらに、全順序集合で添字付けられた $\mathfrak{h}$ の基底 $(y_j)_{j \in J}$ であって、 I は J の部分順序集合であり、 $i \in I$ に対しては $y_i = f(x_i)$ であるものをとる。定理 2.4 より、 $(x_{i_1} \cdots x_{i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in I_{\uparrow}^*}$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底であり、 $(y_{j_1} \cdots y_{j_n})_{(j_1, \dots, j_n) \in J_{\uparrow}^*}$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ の基底である。 $\tilde{f}$ は、各 $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ を $f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_n}) = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$ に移すから、単射である。 $\square$

3 表現

3.1 表現

定義 3.1 (表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする。 V がベクトル空間であり、 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が準同型であるとき、 ρ は $\mathfrak{g}$ の V 上の**表現** (representation) である、あるいは (ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の**表現**であるという。 $\mathfrak{g}$ の V 上の表現が一つ固定されているとき、 V を $\mathfrak{g}$ 上の**加群** (module over $\mathfrak{g}$) あるいは $\mathfrak{g}$ **加群**という。

(ρ, V) を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする。 V のベクトル空間としての次元を、 ρ の**次元**という。 ρ が**忠実** (faithful) であるとは、 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が単射であることをいう。

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現と $\mathfrak{g}$ 加群は、実質的には同じものである。「 V を $\mathfrak{g}$ 加群とする」というときは、表現を表す記号 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を明示せずに、 $\rho(x)v$ を xv と書くことが多い。以下、いちいち明示しないが、Lie 代数の表現に関する用語は、Lie 代数上の加群に対しても用いる。

注意 3.2 包絡代数の普遍性 (命題 2.2) より、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のベクトル空間 V 上の表現を考えることは、その包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の V 上の表現 (すなわち、 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ から V への代数の準同型) を考えることと等価である。本稿では、 ρ を Lie 代数の表現とすると、これに対応する包絡代数の表現も、同じ記号 ρ で表す。

注意 3.3 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ -Lie 代数とする。 $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とし、 V' を $\mathbb{K}'$ ベクトル空間とすると、 $\mathbb{K}$ -Lie 代数の準同型 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V')$ を、 $\mathfrak{g}$ の V' 上の $\mathbb{K}'$ **表現**という。係数拡大の普遍性より、 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の V' 上の $\mathbb{K}'$ 表現を考えることは、 $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}'})$ の V' 上の表現を考えることと等価である。

例 3.4 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする。

- (1) V をベクトル空間とし、任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x) = 0 \in \mathfrak{gl}(V)$ と定めると、 ρ は $\mathfrak{g}$ の V 上の表現である。これを、 $\mathfrak{g}$ の V 上の**自明表現** (trivial representation) という。
- (2) $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}(V)$ (V はベクトル空間) の部分 Lie 代数であるとする、 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への包含準同型は、 $\mathfrak{g}$ の V 上の忠実な表現である。これを、 $\mathfrak{g}$ の**自然表現** (natural representation) という。
- (3) 命題 1.9 (2) より、 $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は、 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現である。これを、 $\mathfrak{g}$ の**随伴表現** (adjoint representation) という。

定義 3.5 (不変元) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 (ρ, V) をその表現とする。 $v \in V$ が ρ に関して**不変** (invariant) であるとは、 $\rho(\mathfrak{g})v = 0$ であることをいう。

定義 3.6 (表現の間の準同型) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, (ρ, V) と (σ, W) をその表現とする. 線型写像 $\phi: V \rightarrow W$ であって, 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi \circ \rho(x) = \sigma(x) \circ \phi$ を満たすものを, ρ から σ への**準同型** (homomorphism), あるいは V から W への $\mathfrak{g}$ **準同型** という. さらに, ϕ が線型同型であるとき, これを, ρ から σ への**同型** (isomorphism), あるいは V から W への $\mathfrak{g}$ **同型** という. ρ から σ への同型が存在するとき, これらの表現は**同型** (isomorphic) であるという.

3.2 表現に対する演算

定義 3.7 (部分表現, 商表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の表現とし, W を V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間とすると, ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の $W, V/W$ 上の表現を, それぞれ ρ の**部分表現** (subrepresentation), **商表現** (quotient representation) と呼ぶ. $\mathfrak{g}$ 加群に対しては, 対応して, **部分加群** (submodule), **商加群** (quotient module) という用語を用いる.

定義 3.8 (反傾表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の表現とすると, $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho^\vee(x) = -\rho(x)^* \in \mathfrak{gl}(V^*)$$

と定めると, 容易に確かめられるように, $(\rho^\vee, V^*)$ は $\mathfrak{g}$ の表現である. この表現 $\rho^\vee$ を, ρ の**反傾表現** (contragredient representation) という. $\mathfrak{g}$ 加群に対しては, 対応して, **反傾加群** (contragredient module) という用語を用いる.

定義 3.9 (直和表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $((\rho_i, V_i))_{i \in I}$ を $\mathfrak{g}$ の表現の族とすると, $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ と置き, $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho(x) = \bigoplus_{i \in I} \rho_i(x) \in \mathfrak{gl}(V)$$

と定めると, 容易に確かめられるように, (ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の表現である. この表現 ρ を, $(\rho_i)_{i \in I}$ の**直和表現** (direct sum representation) という. $\mathfrak{g}$ 加群に対しては, 対応して, **直和加群** (direct sum module) という用語を用いる.

定義 3.10 (テンソル積表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_n, V_n)$ を $\mathfrak{g}$ の表現とすると, $V = \bigotimes_{i=1}^n V_i$ と置き, $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n \text{id}_{V_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{V_{i-1}} \otimes \rho_i(x) \otimes \text{id}_{V_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{V_n} \in \mathfrak{gl}(V)$$

と定めると, 容易に確かめられるように, (ρ, V) は $\mathfrak{g}$ の表現である. この表現 ρ を, $\rho_1, \dots, \rho_n$ の**テンソル積表現** (tensor product representation) という. $\mathfrak{g}$ 加群に対しては, 対応して, **テンソル積加群** (tensor product module) という用語を用いる.

次の定義では, ベクトル空間 $V_1, \dots, V_n, W$ に対して, $V_1 \times \dots \times V_n$ から W への多重線型写像全体のなすベクトル空間を, $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ と書く.

定義 3.11 (多重線型写像の空間上に定まる表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_n, V_n), (\sigma, W)$ を $\mathfrak{g}$ の表現とすると, $V_1 \times \dots \times V_n$ から W への多重線型写像全体のなすベクトル空間を M と置き, $x \in \mathfrak{g}$ と

$\phi \in \text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ に対して $\tau(x)\phi \in \text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ を

$$\tau(x)\phi(v_1, \dots, v_n) = -\sigma(x) \left(\sum_{i=1}^n \phi(v_1, \dots, v_{i-1}, \rho_i(x)v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \right) \quad (v_i \in V_i)$$

と定めると、容易に確かめられるように、 $(\tau, \text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W))$ は $\mathfrak{g}$ の表現である。この表現 τ を、 $\rho_1, \dots, \rho_n, \sigma$ が定める $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ 上の表現という。

(ρ, V) を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とすると、 ρ の反傾表現は、 ρ と 1 次元自明表現が定める $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ 上の表現にほかならない。

3.3 既約表現

定義 3.12 (既約表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 (ρ, V) をその表現とする。 ρ が**既約** (irreducible) であるとは、 $V \neq 0$ であり、 V が 0 と V 以外の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間をもたないことをいう。 ρ が**可約** (reducible) であるとは、 $V \neq 0$ であり、 ρ が既約でないことをいう。

命題 3.13 (Schur の補題) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 (ρ, V) と (σ, W) をその既約表現とする。

- (1) ρ と σ が同型でなければ、 ρ から σ への準同型は、0 のみである。
- (2) 係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であり、 V が有限次元であるとする。このとき、 ρ から自身への準同型は、恒等写像 id_V のスカラー倍のみである。

証明 (1) ρ から σ への準同型 $f \neq 0$ が存在したとする。すると、 $\text{Ker}(f)$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間であり、 V とは異なるから、 ρ の既約性より、 $\text{Ker}(f) = 0$ である。また、 $\text{Im}(f)$ は W の $\sigma(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間であり、0 とは異なるから、 σ の既約性より、 $\text{Im}(f) = W$ である。よって、 f は ρ から σ への同型である。対偶をとれば、主張が従う。

(2) f を ρ から自身への準同型とする。仮定より、 f は固有値 $\lambda \in \mathbb{K}$ をもつ。 $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間であり、0 とは異なるから、 ρ の既約性より、 $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) = V$ である。すなわち、 $f = \lambda \text{id}_V$ である。□

定義 3.14 (組成列) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 (ρ, V) をその表現とする。 ρ の**組成列** (composition series) とは、 V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間の列 $(V_0, \dots, V_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) であって、 $V = V_0 \supseteq \dots \supseteq V_n = 0$ を満たし、任意の $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の表現が既約であるものをいう。

命題 3.15 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) は、組成列をもつ。^{*2}

証明 V の次元に関する帰納法で示す。 $V = 0$ の場合は明らかである。 $V \neq 0$ とし、次元がより小さい場合には主張は正しいとする。 V は有限次元だから、 V の 0 でない $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間の中で極小なもの W がとれる。極小性より、 ρ の W 上の部分表現は既約である。等化線型写像を $\phi: V \rightarrow V/W$ と書き、 ρ の V/W 上の商表現を $\bar{\rho}$ と書く。すると、帰納法の仮定より、 $\bar{\rho}$ の組成列 $(\bar{V}_0, \dots, \bar{V}_n)$ がとれる。このとき、 $(\phi^{-1}(\bar{V}_0), \dots, \phi^{-1}(\bar{V}_n), 0)$ は ρ の組成列である。これで、帰納法が完成した。□

定義 3.16 (完全可約表現) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 (ρ, V) をその表現とする。 ρ が**完全可約** (completely reducible) であるとは、

^{*2} 命題 3.15 は、Jordan-Hölder の定理の一部である。

であるとは、 V の任意の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間が $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間をもつことをいう。

命題 3.17 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) が完全可約ならば、その任意の部分表現と商表現も完全可約である。

証明 ρ が完全可約であるとする。完全可約表現 ρ の任意の商表現は ρ のある部分表現に同型だから、部分表現に関する主張だけを示せば十分である。 (ρ', V') を (ρ, V) の部分表現とし、 V' の V における $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間 V'' をとる。 W' を V' の $\rho'(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間とすると、 $W' \oplus V''$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間だから、 ρ の完全可約性より、 $W' \oplus V''$ の V における $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間 M がとれる。ここで、直和分解 $V = V' \oplus V''$ に関する V' の上への射影を $p: V \rightarrow V'$ と書くと、容易に確かめられるように、 $p(M)$ は W' の V' における $\rho'(\mathfrak{g})$ 安定な補空間となる。よって、 ρ' は完全可約である。□

命題 3.18 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 (ρ, V) をその表現とする。次の条件について、 $(a) \implies (b)$ が成り立つ。さらに、 V が有限次元ならば、これらの条件は同値である。

(a) ρ は既約表現の族に直和分解できる。

(b) ρ は完全可約である。

証明 $(a) \implies (b)$ (ρ, V) が既約表現の族 $((\rho_i, V_i))_{i \in I}$ に直和分解されるとする。 W を V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間とする。すると、Zorn の補題より、 $I' \subseteq I$ であって $W \cap \bigoplus_{i \in I'} V_i = 0$ を満たすものの中で極大なものがとれる。このような I' をとると、 $W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i = V$ となることを示す。そうでないと仮定すると、ある $j \in I \setminus I'$ が存在して、 V_j は $W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i$ に含まれない。 ρ_j は既約だから、 $V_j \cap (W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i) = 0$ となり、したがって、 $W \cap \bigoplus_{i \in I' \cup \{j\}} V_i = 0$ となる。ところが、これは、 I' の極大性に反する。よって、 $W \oplus \bigoplus_{i \in I'} V_i = V$ が成り立つ。これで、 ρ が完全可約であることが示された。

$(b) \implies (a)$ (V が有限次元である場合) V の次元に関する帰納法で示す。 $V = 0$ の場合は明らかである。 $V \neq 0$ とし、次元がより小さい場合には主張は正しいとする。 V は有限次元だから、 V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間 $W \neq 0$ の中で極小なものがとれる。極小性より、 ρ の W 上の部分表現は既約である。また、 ρ は完全可約だから、 W の V における $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間 V' がとれる。 ρ の V' 上の部分表現はまた完全可約だから (命題 3.17)、帰納法の仮定より、それは既約表現の族に直和分解できる。よって、 ρ も既約表現の族に直和分解できる。これで、帰納法が完成した。□

3.4 不変双線型形式

定義 3.19 (不変双線型形式) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を双線型形式とする。

(1) B が**不変** (invariant) であるとは、任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B([x, y], z) + B(x, [y, z]) = 0$$

が成り立つことをいう。

(2) B が**完全不変** (completely invariant) であるとは、 $\mathfrak{g}$ 上の任意の導分 D と $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B(D(x), y) + B(x, D(y)) = 0$$

が成り立つことをいう。

注意 3.20 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の双線型形式 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ が不変であるための必要十分条件は、任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B(\text{ad}(z)x, y) + B(x, \text{ad}(z)y) = 0$$

が成り立つことである。これは、 $\mathfrak{g}$ の随伴表現と 1 次元自明表現が定める $\text{Mult}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ 上の表現に関して B が (定義 3.5 の意味で) 不変であるということにほかならない。また、この条件は、 $\mathfrak{g}$ 上の任意の内部導分 D と $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$B(D(x), y) + B(x, D(y)) = 0$$

が成り立つことともいい換えられる。特に、Lie 代数上の双線型形式は、完全不変ならば不変である。

命題 3.21 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を双線型形式とする。 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間とし、

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}' &= \{y \in \mathfrak{g} \mid B(\mathfrak{a}, y) = 0\}, \\ \mathfrak{a}'' &= \{x \in \mathfrak{g} \mid B(x, \mathfrak{a}) = 0\}\end{aligned}$$

と置く。

- (1) B が不変であり、 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば、 $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。
- (2) B が完全不変であり、 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の特性イデアルならば、 $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ は $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである。

証明 (1) D を $\mathfrak{g}$ 上の内部導分とする。 $\mathfrak{a}$ が D 安定であることより $B(D(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}') \subseteq B(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = 0$ だから、 $B(\mathfrak{a}, D(\mathfrak{a}')) = B(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = 0$ である。すなわち、 $\mathfrak{a}'$ は D 安定である。よって、 $\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。同様に、 $\mathfrak{a}''$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

- (2) (1) の証明において「内部導分」を「導分」に置き換えれば、(2) の証明となる。 □

3.5 トレース形式, Killing 形式

定義 3.22 (トレース形式, Killing 形式) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする。

- (1) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) に対して、

$$B_\rho(x, y) = \text{tr}(\rho(x)\rho(y)) \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

によって定まる双線型形式 $B_\rho: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を、 ρ が定める**トレース形式** (trace form) という。

- (2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする。このとき、 $\mathfrak{g}$ の随伴表現のトレース形式を、 $\mathfrak{g}$ の**Killing 形式** (Killing form) という。

命題 3.23 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする。

- (1) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) のトレース形式は、 $\mathfrak{g}$ 上の不変な対称双線型形式である。
- (2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする。このとき、 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式は、 $\mathfrak{g}$ 上の完全不変な対称双線型形式である。

証明 (1) ρ のトレース形式を B_ρ と書く。トレースの性質より、 B_ρ は対称である。また、任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$

に対して

$$\begin{aligned}
B_\rho([x, y], z) &= \text{tr}(\rho([x, y])\rho(z)) \\
&= \text{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\
&= \text{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(x)\rho(z)\rho(y)) \\
&= \text{tr}(\rho(x)\rho([y, z])) \\
&= B_\rho(x, [y, z])
\end{aligned}$$

だから, B_ρ は不変である.

(2) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書く. $B_{\mathfrak{g}}$ が対称であることは, (1) の主張に含まれる. また, $\mathfrak{g}$ 上の任意の導分 D と任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して, 命題 1.9 (1) より

$$\begin{aligned}
B_{\mathfrak{g}}(D(x), y) &= \text{tr}(\text{ad}(D(x))\text{ad}(y)) \\
&= \text{tr}(D\text{ad}(x)\text{ad}(y) - \text{ad}(x)D\text{ad}(y)) \\
&= -\text{tr}(\text{ad}(x)D\text{ad}(y) - \text{ad}(y)\text{ad}(x)D) \\
&= -\text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(D(y))) \\
&= -B_{\mathfrak{g}}(x, D(y))
\end{aligned}$$

だから, $B_{\mathfrak{g}}$ は完全不変である. □

系 3.24 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする.

- (1) (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとすると, ρ のトレース形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間は, $\mathfrak{g}$ のイデアルである.
- (2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする. このとき, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の特性イデアルとすると, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間は, $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである.

証明 命題 3.23 と命題 3.21 から従う. □

命題 3.25 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. このとき, $\mathfrak{a}$ の Killing 形式は, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ への制限に等しい.

証明 一般に, V を有限次元ベクトル空間, W をその部分ベクトル空間, u を V 上の線型変換であって W を安定にするものとし, u が誘導する $W, V/W$ 上の線型変換をそれぞれ u', u'' と書くと, $\text{tr}_V(u) = \text{tr}_W(u') + \text{tr}_{V/W}(u'')$ が成り立つ. さらに, $u(V) \subseteq W$ ならば, $u'' = 0$ だから, $\text{tr}_V(u) = \text{tr}_W(u')$ が成り立つ. そこで, $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ の Killing 形式をそれぞれ $B_{\mathfrak{g}}, B_{\mathfrak{a}}$ と書くと, 任意の $x, y \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$B_{\mathfrak{a}}(x, y) = \text{tr}_{\mathfrak{a}}(\text{ad}_{\mathfrak{a}}(x)\text{ad}_{\mathfrak{a}}(y)) = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y)$$

である. □

命題 3.26 $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とし, $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ -Lie 代数とする.

- (1) (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする. ρ の係数拡大 $\rho_{(\mathbb{K}')}$ のトレース形式は, ρ のトレース形式の $\mathbb{K}'$ への係数拡大に等しい.
- (2) $\mathfrak{g}$ が有限次元であるとする. このとき, $\mathfrak{g}$ の係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Killing 形式は, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の $\mathbb{K}'$ への係数拡大に等しい.

証明 (1) $\rho, \rho_{(\mathbb{K}')}$ のトレース形式を, それぞれ $B_\rho, B_{\rho_{(\mathbb{K}')}}$ と書く. 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} B_{\rho_{(\mathbb{K}')}}(x \otimes 1, y \otimes 1) &= \text{tr}_{V_{(\mathbb{K}')}}(\rho_{(\mathbb{K}'})(x \otimes 1)\rho_{(\mathbb{K}'})(x \otimes 1)) \\ &= \text{tr}_{V_{(\mathbb{K}')}}(\rho(x)_{(\mathbb{K}')} \rho(y)_{(\mathbb{K}')})) \\ &= \text{tr}_V(\rho(x)\rho(y)) \\ &= B_\rho(x, y) \end{aligned}$$

だから, $B_{\rho_{(\mathbb{K}')}}$ は B_ρ の $\mathbb{K}'$ への係数拡大に等しい.

(2) (1) の特別な場合である. □

3.6 Casimir 元

命題 3.27 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $\mathfrak{a}$ をその有限次元イデアルとし, $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を不変な双線型形式であって $B|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$ が非退化であるものとする. $(e_1, \dots, e_n)$ を $\mathfrak{a}$ の基底, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ を $\mathfrak{a}$ の基底であって $B(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} は Kronecker のデルタ) を満たすものとし,

$$c = \sum_{i=1}^n e_i e_i^* \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$$

と置く. この c は, 包絡代数の中心 $\mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ の元であり, $\mathfrak{a}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ のとり方によらない.

証明 $\phi: \text{End}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}^*$ を自然な線型同型, $\psi: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}^*$ を B が定める線型同型 $y \mapsto B(-, y)$, $\iota: \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \rightarrow \mathbf{T}(\mathfrak{g})$ を包含線型写像, $\pi: \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を等化準同型とする. すると, $c \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ は, 線型写像

$$\text{End}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}^* \xrightarrow{\text{id}_{\mathfrak{a}} \otimes \psi^{-1}} \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathbf{T}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{U}(\mathfrak{g})$$

による $\text{id}_{\mathfrak{a}} \in \text{End}(\mathfrak{a})$ の像にほかならないから, $\mathfrak{a}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ のとり方によらない. さらに, $\mathfrak{a}$ の随伴表現から定まる $\text{End}(\mathfrak{a}), \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}^*, \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ 上の表現と, $\mathfrak{g}$ の随伴表現の $\mathfrak{a}$ への制限から定まる $\mathbf{T}(\mathfrak{g}), \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上の表現を考えると, 容易に確かめられるように, 上記の線型写像はすべて $\mathfrak{g}$ 準同型である. これらの表現に関して, $\text{id}_{\mathfrak{a}} \in \text{End}(\mathfrak{a})$ は不変だから, $c \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ も不変である. これは, c が包絡代数の中心 $\mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ に属することを意味する. □

定義 3.28 (Casimir 元) 命題 3.27 の状況で, $c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ を, B と $\mathfrak{a}$ に伴う **Casimir 元** (Casimir element) という. B が $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 ρ のトレース形式である場合には, これを, ρ と $\mathfrak{a}$ に伴う Casimir 元という. $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ である (したがって, $\mathfrak{g}$ は有限次元であり, B は非退化である) 場合には, これを単に, B (あるいは ρ) に伴う Casimir 元という.

命題 3.29 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $\mathfrak{a}$ をその有限次元イデアルとし, (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現であってそのトレース形式 B_ρ が $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ 上で非退化であるものとする. ρ と $\mathfrak{a}$ に伴う Casimir 元を, $c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ と書く.

- (1) $\rho(c)$ は, V の $\mathfrak{g}$ 自己準同型である.
- (2) $\text{tr}(\rho(c)) = \dim \mathfrak{a}$ である.
- (3) ρ は既約であり, $\dim \mathfrak{a}$ は係数体 $\mathbb{K}$ の標数の倍数ではないとする. このとき, $\rho(c)$ は, V の $\mathfrak{g}$ 自己同型である.

証明 (1) $c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ だから, $\rho(c)$ は任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対する $\rho(x)$ と可換である. すなわち, $\rho(c)$ は V の $\mathfrak{g}$ 自己準同型である.

(2) ρ のトレース形式を B_ρ と書く. $\mathfrak{a}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ を一つとり, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ を $\mathfrak{a}$ の基底であって $B(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$ を満たすものとする. すると, $c = \sum_{i=1}^n e_i e_i^*$ だから,

$$\mathrm{tr}(\rho(c)) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(\rho(e_i)\rho(e_i^*)) = \sum_{i=1}^n B_\rho(e_i, e_i^*) = \dim \mathfrak{a}$$

である.

(3) $\dim \mathfrak{a}$ が $\mathbb{K}$ の標数の倍数ではないことと (2) より, $\rho(c) \neq 0$ である. (1) より $\mathrm{Ker}(\rho(c))$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間だから, ρ が既約であることと $\rho(c) \neq 0$ であることより, $\mathrm{Ker}(\rho(c)) = 0$ である. また, (1) より $\mathrm{Im}(\rho(c))$ は V の $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間だから, ρ が既約であることと $\rho(c) \neq 0$ であることより, $\mathrm{Im}(\rho(c)) = V$ である. よって, $\rho(c)$ は V の $\mathfrak{g}$ 自己同型である. $\square$

4 冪零 Lie 代数

4.1 冪零 Lie 代数

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とするとき, $p \in \mathbb{N}$ に対する $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g})$ を,

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})] \quad (p \in \mathbb{N})$$

によって再帰的に定める. すなわち, $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^p \mathfrak{g}$ とする. 列 $(\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}))_{p \in \mathbb{N}}$ を, $\mathfrak{g}$ の**降中心列** (lower central sequence) という.

定義 4.1 (冪零 Lie 代数) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**冪零** (nilpotent) であるとは, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) = 0$ となることをいう.

明らかに, 可換 Lie 代数は冪零である.

命題 4.2 $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とする.

- (1) $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零であることと, その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が冪零であることは同値である.
- (2) $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が冪零であることと, その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が冪零であることは同値である.

証明 (1) 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ だから, 主張が成り立つ.

(2) 明らかである. $\square$

命題 4.3

- (1) 冪零 Lie 代数の部分 Lie 代数は, 冪零である.
- (2) 冪零 Lie 代数の商 Lie 代数は, 冪零である.
- (3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が冪零であり, $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ であるならば, $\mathfrak{g}$ は冪零である.
- (4) $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を Lie 代数の族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. このとき, すべての $\mathfrak{g}_i$ が冪零であることと, $\mathfrak{g}$ が冪零であることは同値である.

証明 (1) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とする. 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) \subseteq \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})$ だから, $\mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathfrak{h}$ も冪零である.

(2), (3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとし, 等化準同型を $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と書く. 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $f(\mathcal{C}^p(\mathfrak{g})) = \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから, $\mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も冪零である. 一方で, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が冪零ならば, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $f(\mathcal{C}^p(\mathfrak{g})) = \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$ となる. すなわち, $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ となる. さらに, $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ ならば, $\mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$ となるから, $\mathfrak{g}$ は冪零である.

(4) 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}_i)$ だから, すべての $\mathfrak{g}_i$ が冪零であることと $\mathfrak{g}$ が冪零であることは同値である. $\square$

命題 4.4 有限次元冪零 Lie 代数の Killing 形式は, 0 である.

証明 $\mathfrak{g}$ を有限次元冪零 Lie 代数とし, その Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書く. 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して, $\text{ad}(x)\text{ad}(y)$ は冪零だから, $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = 0$ である. $\square$

注意 4.5 命題 4.4 の逆は成り立たない. すなわち, 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が 0 であっても, $\mathfrak{g}$ が冪零であるとは限らない.

たとえば, $\mathfrak{g} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$ 上の交代的な乗法 $(x, y) \mapsto [x, y]$ を

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = ie_3, \quad [e_2, e_3] = 0$$

によって定めると, 容易に確かめられるように, $\mathfrak{g}$ は Lie 代数をなす. 基底 (e_1, e_2, e_3) に関する $\text{ad}(e_1)$, $\text{ad}(e_2)$, $\text{ad}(e_3)$ の行列表示はそれぞれ

$$\text{ad}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, これらから確かめられるように, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式は 0 である. 一方で, 任意の $p \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$ だから, $\mathfrak{g}$ は冪零ではない.*3

4.2 Engel の定理

補題 4.6 A を結合代数とし, $\mathfrak{g}$ を A (を交換子によって Lie 代数とみなしたものの) の部分 Lie 代数とする. $x \in \mathfrak{g}$ が (A の乗法に関して) 冪零ならば, $\mathfrak{g}$ 上の線型変換 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は冪零である.

証明 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は $\text{ad}_A(x)$ の制限だから, $\mathfrak{g} = A$ である場合に主張を示せば十分である. $x \in A$ として, A 上の線型変換 $y \mapsto xy$, $y \mapsto yx$ をそれぞれ L_x , R_x と書く. すると, L_x と R_x は可換だから, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\text{ad}_A(x)^n = (L_x - R_x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} L_x^{n-k} R_x^k$$

が成り立つ. ここで, $x^p = 0$ ($p \in \mathbb{N}$) であるとする. $L_x^p = R_x^p = 0$ だから, 上式より $\text{ad}_A(x)^{\max\{2p-1, 0\}} = 0$ を得る. よって, x が冪零ならば, $\text{ad}_A(x)$ は冪零である. $\square$

定理 4.7 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし, (ρ, V) をその表現とする. 次の条件は同値である.

*3 この例については, Mathematics Stack Exchange [4] を参考にした.

(a) $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である.

(b) ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して, $\rho(\mathfrak{g})^p = 0$ (すなわち, 任意の $x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x_1) \cdots \rho(x_p) = 0$) となる.*4

証明 (b) $\implies$ (a) 明らかである.

(a) $\implies$ (b) 必要ならば $\mathfrak{g}/\text{Ker}(\rho)$ を改めて $\mathfrak{g}$ と置き直すことで, ρ が忠実であると仮定しても一般性を失わない. このとき, ρ が条件 (a) を満たすならば, 補題 4.6 より, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である. そこで, 以下では, $\mathfrak{g}$ は有限次元 Lie 代数であって $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元が冪零であるものとし, この $\mathfrak{g}$ に対して主張を示す.

有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の任意の表現 (ρ, V) に対して (a) $\implies$ (b) が成り立つとき, $\mathfrak{h}$ は条件 (E) を満たすということにする. $\mathfrak{g}$ は有限次元だから, $\mathfrak{g}$ の条件 (E) を満たす部分 Lie 代数の中で極大なもの $\mathfrak{h}$ がとれる. 以下, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ であることを示す.

$\mathfrak{h}$ は $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ 安定だから, 随伴表現 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ から, $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上の表現 σ が誘導される. 仮定より, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零だから, $\sigma(\mathfrak{h})$ の任意の元も冪零である. したがって, $\mathfrak{h}$ が条件 (E) を満たすことより, $\sigma(\mathfrak{h})$ の十分大きい冪は 0 となる. ここで, $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ であるとする, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \neq 0$ だから, $\sigma(\mathfrak{h})^p \neq 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ の中で最小のものがとれる. これに対して, $\bar{x} \in \sigma(\mathfrak{h})^p \setminus \{0\}$ がとれ, この $\bar{x}$ は $\sigma(\mathfrak{h})\bar{x} = 0$ を満たす. $\bar{x} = x + \mathfrak{h}$ と表すと, $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ かつ $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ である. そこで, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}x$ と置くと, $\tilde{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり, $\mathfrak{h}$ は $\tilde{\mathfrak{h}}$ のイデアルである.

(τ, W) を $\tilde{\mathfrak{h}}$ の表現とし, $\tau(\tilde{\mathfrak{h}})$ の任意の元が冪零であるとする. このとき, $\mathfrak{h}$ が条件 (E) を満たすことより, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau(\mathfrak{h})^p = 0$ となる. また, $\tau(x)$ は冪零だから, ある $q \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau(x)^q = 0$ となる. この状況の下で, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $y_1, \dots, y_N \in \tilde{\mathfrak{h}}$ に対して

$$\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) = 0 \quad (*)$$

が成り立つことを示したい. $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}x$ だから, 各 y_i は $\mathfrak{h}$ の元または x であると仮定してよい. $y_1, \dots, y_N$ の中に, $\mathfrak{h}$ に属するものが n 個, x であるものが $N - n$ 個あるとする. $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ だから, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, 包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ において

$$\begin{aligned} x\mathfrak{h}^k &\subseteq \mathfrak{h}^k x + [x, \mathfrak{h}^k] \\ &\subseteq \mathfrak{h}^k x + \sum_{i=0}^{k-1} \mathfrak{h}^i [x, \mathfrak{h}] \mathfrak{h}^{k-1-i} \\ &\subseteq \mathfrak{h}^k x + \mathfrak{h}^k \end{aligned}$$

が成り立つ. これを繰り返し用いることで,

$$\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) \in \tau(\mathfrak{h})^n \tau(x)^{N-n} + \tau(\mathfrak{h})^n$$

を得る. $n \geq p$ ならば, 上式より, $\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) = 0$ である. 一方で, $N > p(q-1) + p - 1 = pq - 1$ ならば, $n < p$ であるとき, $y_1, \dots, y_N$ の中に x が q 個以上連続する部分が必ず存在するので, やはり $\tau(y_1) \cdots \tau(y_N) = 0$ となる. よって, $N \geq pq$ とすれば, $(*)$ が常に成り立つ. これで, 主張が示された. $\square$

系 4.8 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数, (ρ, V) をその表現であって $V \neq 0$ であるものとし, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零であるとする. このとき, $v \in V \setminus \{0\}$ であって $\rho(\mathfrak{g})v = 0$ を満たすものが存在する.

*4 著者は, この定理を Nash [3] で知った.

証明 仮定と定理 4.7 より, $\sigma(\mathfrak{g})$ の十分大きい冪は 0 となる. $V \neq 0$ だから, $\sigma(\mathfrak{g})^p \neq 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ の中で最小のものがとれる. これに対して, $v \in \sigma(\mathfrak{g})^p \setminus \{0\}$ をとると, この v は $\rho(\mathfrak{g})v = 0$ を満たす. $\square$

系 4.9 (Engel の定理) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, (ρ, V) をその有限次元表現とし, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零であるとする. このとき, V の基底を適当にとれば, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の対応する行列表示が狭義上三角行列となる.

証明 ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり (命題 3.15), 各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して, ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く. すると, 仮定より $\rho_i(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零だから, 系 4.8 より $\bar{v}_i \in V_i/V_{i+1} \setminus \{0\}$ であって $\rho_i(\mathfrak{g})\bar{v}_i = 0$ を満たすものが存在する. ρ_i は既約だから, $V_i/V_{i+1} = \mathbb{K}\bar{v}_i$ が成り立つ. そこで, 各 $\bar{v}_i$ を $v_i + V_{i+1}$ と表すと, $(v_{n-1}, \dots, v_0)$ は V の基底である. さらに, 各 i に対して, $\rho(\mathfrak{g})v_i \in V_{i+1} = \text{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i+1}, \dots, v_{n-1}\}$ が成り立つ. すなわち, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の基底 $(v_{n-1}, \dots, v_0)$ に関する行列表示は, 狭義上三角行列である. $\square$

系 4.10 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ は冪零である.
- (b) $\text{ad}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である.

証明 $\mathfrak{g}$ が冪零であるとは, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{ad}(\mathfrak{g})^p = 0$ となるということだから, 主張は定理 4.7 の特別な場合である. $\square$

系 4.11 $\mathfrak{g}$ は有限次元 Lie 代数であり, その忠実な表現 (ρ, V) であって, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元が冪零であるものが存在するとする. このとき, $\mathfrak{g}$ は冪零である.

証明 仮定と補題 4.6 より, $\text{ad}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である. よって, 系 4.10 より, $\mathfrak{g}$ は冪零である. $\square$

5 可解 Lie 代数

5.1 可解 Lie 代数

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とすると, $p \in \mathbb{N}$ に対する $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g})$ を,

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^{p+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^p(\mathfrak{g})] \quad (p \in \mathbb{N})$$

によって再帰的に定める. 列 $(\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}))_{p \in \mathbb{N}}$ を, $\mathfrak{g}$ の**導来列** (derived sequence) という.

定義 5.1 (可解 Lie 代数) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**可解** (solvable) であるとは, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) = 0$ となることをいう.

帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})$ だから, 冪零 Lie 代数は可解である.

命題 5.2 $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とする.

- (1) $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可解であることと, その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が可解であることは同値である.
- (2) $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が可解であることと, その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が可解であることは同値である.

証明 (1) 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = \mathcal{D}^p(\mathfrak{g})_{(\mathbb{K}')}$ だから, 主張が成

り立つ.

(2) 明らかである. □

命題 5.3

- (1) 可解 Lie 代数の部分 Lie 代数は, 可解である.
- (2) 可解 Lie 代数の商 Lie 代数は, 可解である.
- (3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}$ が可解ならば, $\mathfrak{g}$ は可解である.
- (4) $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を Lie 代数の族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. このとき, すべての $\mathfrak{g}_i$ が可解であることと, $\mathfrak{g}$ が可解であることは同値である.
- (5) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ をそのイデアルの有限族とし, $\mathfrak{a} = \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ と置く. すべての $\mathfrak{a}_i$ が可解であることと, $\mathfrak{a}$ が可解であることは同値である.

証明 (1) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とする. 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{D}^p(\mathfrak{h}) \subseteq \mathcal{D}^p(\mathfrak{g})$ だから, $\mathfrak{g}$ が可解ならば $\mathfrak{h}$ も可解である.

(2), (3) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとし, 等化準同型を $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と書く. 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $f(\mathcal{D}^p(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから, $\mathfrak{g}$ が可解ならば $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解である. 一方で, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可解ならば, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $f(\mathcal{D}^p(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$ となる. すなわち, $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ となる. さらに, $\mathfrak{a}$ が可解ならば, ある $q \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathcal{D}^{p+q}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^q(\mathcal{D}^p(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{D}^q(\mathfrak{a}) = 0$ となるから, $\mathfrak{g}$ は冪零である.

(4) 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{D}^p(\mathfrak{g}_i)$ だから, すべての $\mathfrak{g}_i$ が可解であることと $\mathfrak{g}$ が可解であることは同値である.

(5) $\mathfrak{a}$ が可解ならば, (1) より, すべての $\mathfrak{a}_i$ は可解である. その逆を示すためには, $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が可解であるとして, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ も可解であることを示せばよい. $\mathfrak{a}$ から $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ への自然な準同型は全射だから, (2) より $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ は可解である. このことと (3) より, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ は可解である. これで, 主張が示された. □

系 5.4 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, その可解イデアルの中で最大のものが存在する.

証明 $\mathfrak{g}$ のすべての可解イデアルを和を $\mathfrak{r}$ と置く. $\mathfrak{g}$ は有限次元だから, $\mathfrak{g}$ の有限個の可解イデアル $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ が存在して, $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n$ が成り立つ. よって, 命題 5.3 より $\mathfrak{r}$ は可解であり, これが $\mathfrak{g}$ の可解イデアルの中で最大のものとなる. □

5.2 根基

定義 5.5 (根基) 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の可解イデアルの中で最大のもの (系 5.4 より存在する) を, $\mathfrak{g}$ の**根基** (radical) といい, $\text{rad}(\mathfrak{g})$ と書く.

命題 5.6 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を有限次元 Lie 代数とし, $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を全射準同型とする. このとき, $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{h})$ である.

証明 $f(\text{rad}(\mathfrak{g}))$ は $\mathfrak{h}$ の可解イデアルだから (命題 5.3 (2)), $\text{rad}(\mathfrak{h})$ に含まれる. □

注意 5.7 後に系 6.17 で示すように, 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数の間の全射準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ について, $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) = \text{rad}(\mathfrak{h})$ が成り立つ.

命題 5.8 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を有限次元 Lie 代数の有限族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. このとき, $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ である.

証明 $\bigoplus_{i \in I} \text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルだから (命題 5.3 (4)), $\text{rad}(\mathfrak{g})$ に含まれる. 一方で, $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i$ への射影による $\text{rad}(\mathfrak{g})$ の像は $\mathfrak{g}_i$ の可解イデアルだから (命題 5.3 (2)), $\text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ に含まれる. 任意の $i \in I$ に対してこれが成り立つから, $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \bigoplus_{i \in I} \text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ である. よって, $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ である. $\square$

5.3 冪零根基

定義 5.9 (冪零根基) 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**冪零根基** (nilpotent radical) を,

$$\text{nil}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} \text{ の任意の有限次元既約表現 } \rho \text{ に対して } \rho(x) = 0\}$$

と定める.

有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 ρ の核 $\text{Ker}(\rho)$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, 冪零根基 $\text{nil}(\mathfrak{g})$ はその全体の交叉だから, $\text{nil}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

命題 5.10 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数, (ρ, V) をその有限次元表現とし, $\text{nil}(\mathfrak{g})$ が生成する $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の両側イデアルを $\langle \text{nil}(\mathfrak{g}) \rangle$ と書く. このとき, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して, $\rho(\langle \text{nil}(\mathfrak{g}) \rangle)^p = 0$ が成り立つ.

証明 ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり (命題 3.15), 各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して, ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く. すると, 冪零根基の定義より, 各 i に対して $\rho_i(\text{nil}(\mathfrak{g})) = 0$ である. すなわち,

$$\rho(\text{nil}(\mathfrak{g}))V_i \subseteq V_{i+1}$$

である. 各 V_i は $\rho(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ 安定だから, 上式は, $\text{nil}(\mathfrak{g})$ を $\langle \text{nil}(\mathfrak{g}) \rangle$ に置き換えても正しい. よって, $\rho(\langle \text{nil}(\mathfrak{g}) \rangle)^n = 0$ が成り立つ. $\square$

系 5.11 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする.

- (1) 冪零根基 $\text{nil}(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ の冪零イデアルである.
- (2) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) のトレース形式の退化空間は, 冪零根基 $\text{nil}(\mathfrak{g})$ を含む.

証明 (1) 冪零根基 $\text{nil}(\mathfrak{g})$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることは, すでに述べた. 命題 5.10 より, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\text{nil}(\mathfrak{g}))^p = 0$ となり, 特に $\text{ad}_{\text{nil}(\mathfrak{g})}(\text{nil}(\mathfrak{g}))^p = 0$ となるから, $\text{nil}(\mathfrak{g})$ は冪零である.

(2) 命題 5.10 より, $\rho(\mathfrak{g})\rho(\text{nil}(\mathfrak{g}))$ の任意の元は冪零である. よって, ρ のレース形式を B_ρ と書くと, $B_\rho(\mathfrak{g}, \text{nil}(\mathfrak{g})) = \text{tr}(\rho(\mathfrak{g})\rho(\text{nil}(\mathfrak{g}))) = 0$ である. $\square$

命題 5.12 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を有限次元 Lie 代数とし, $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を全射準同型とする. このとき, $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{nil}(\mathfrak{h})$ である.

証明 ρ を $\mathfrak{h}$ の有限次元既約表現とすると, $\rho \circ f$ は $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現だから, $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Ker}(\rho \circ f)$ である. すなわち, $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{Ker}(\rho)$ である. 任意の ρ に対してこれが成り立つから, $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{nil}(\mathfrak{h})$ である. $\square$

注意 5.13 後に系 6.25 で示すように, 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数の間の全射準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$

について、 $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) = \text{nil}(\mathfrak{h})$ が成り立つ。

補題 5.14 $\mathfrak{g}$ は標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数であり、忠実な有限次元既約表現をもつとする。このとき、 $\mathfrak{g}$ の任意の可換イデアル $\mathfrak{a}$ について、 $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ である。

証明 一般性を失わず、 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ (V はベクトル空間) の部分 Lie 代数であり、その自然表現は既約であるとする。 $\mathfrak{g}$ の可換イデアル $\mathfrak{a}$ を任意にとり、 $\mathfrak{a}$ が生成する $\text{End}(V)$ の部分単位的代数を A と書く。 $\mathfrak{a}$ は可換だから、 A も可換である。

準備として、 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{b}$ であって $\mathfrak{a}$ に含まれるものについて、 $\text{tr}(\mathfrak{b}A) = 0$ ならば $\mathfrak{b} = 0$ であることを示す。 $\text{tr}(\mathfrak{b}A) = 0$ であるとする、任意の $x \in \mathfrak{b}$ と $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して $\text{tr}(x^n) = \text{tr}(xx^{n-1}) = 0$ となるから、 $\mathfrak{b}$ の任意の元は冪零である（ここで、 $\mathbb{K}$ の標数が 0 であることを用いた）。そこで、

$$W = \{v \in V \mid \mathfrak{b}v = 0\}$$

と置くと、系 4.8 より $W \neq 0$ である。さらに、 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることから容易に確かめられるように、 W は $\mathfrak{g}$ 安定である。したがって、 $\mathfrak{g}$ の自然表現が既約であることより、 $W = V$ である。すなわち、 $\mathfrak{b} = 0$ である。

補題の主張を示す。まず、 A が可換であることより

$$\text{tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]A) = \text{tr}(\mathfrak{g}[\mathfrak{a}, A]) = 0$$

だから、前段の結果より、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$ である。したがって、 $[\mathfrak{g}, A] = 0$ である。次に、この結果より

$$\text{tr}((\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])A) \subseteq \text{tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]A) = \text{tr}(\mathfrak{g}[\mathfrak{g}, A]) = 0$$

だから、前段の結果より、 $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ である。これで、主張が示された。 $\square$

定理 5.15 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について、 $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が成り立つ。

証明 $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を示す。 $\text{nil}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の冪零イデアルだから（系 5.11 (1)）、 $\text{rad}(\mathfrak{g})$ に含まれる。また、 λ を $\mathfrak{g}$ 上の線型形式であって $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上で消えるものとする、 $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K} \cong \mathfrak{gl}(1, \mathbb{K})$ は $\mathfrak{g}$ の 1 次元（したがって、既約）表現である。したがって、 $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \mathfrak{g}^*, \lambda|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0} \text{Ker}(\lambda) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ である。よって、 $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が成り立つ。

$\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \text{nil}(\mathfrak{g})$ を示す。 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現 (ρ, V) に対して、 $\rho(\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ であることを示せばよい。 $\text{rad}(\mathfrak{g})$ は可解だから、 $\rho(\mathcal{D}^{p+1}(\text{rad}(\mathfrak{g}))) = 0$ を満たす最小の $p \in \mathbb{N}$ がとれる。 $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{a}' = \rho(\mathcal{D}^p(\text{rad}(\mathfrak{g})))$ と置くと、 $\mathfrak{g}'$ の自然表現は既約であり、 $\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{g}'$ のイデアルである。また、 $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] = \rho([\mathcal{D}^p(\text{rad}(\mathfrak{g})), \mathcal{D}^p(\text{rad}(\mathfrak{g}))]) = \rho(\mathcal{D}^{p+1}(\text{rad}(\mathfrak{g}))) = 0$ だから、 $\mathfrak{a}'$ は可換である。したがって、補題 5.14 より

$$\rho(\mathcal{D}^p(\text{rad}(\mathfrak{g})) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subseteq \mathfrak{a}' \cap [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = 0$$

が成り立つ。ここで、 $p \geq 1$ であるとする、 $\mathcal{D}^p(\text{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ だから、上式より $\rho(\mathcal{D}^p(\text{rad}(\mathfrak{g}))) = 0$ となるが、これは p の最小性に反する。よって、 $p = 0$ であり、これを上式に代入すると

$$\rho(\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$$

を得る。これで、主張が示された。 $\square$

系 5.16 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数の有限族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. このとき, $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \text{nil}(\mathfrak{g}_i)$ である.

証明 $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ (命題 5.8) かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{i \in I} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$ だから, 定理 5.15 より $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \text{nil}(\mathfrak{g}_i)$ である. $\square$

系 5.17 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ は可解である.
- (b) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は冪零である.
- (c) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は可解である.

証明 (a) $\implies$ (b) $\mathfrak{g}$ が可解ならば, $\text{nil}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ だから (定理 5.15), $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は冪零である (系 5.11 (1)).

(b) $\implies$ (c) 明らかである.

(a) $\implies$ (b) $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は可換だから, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が可解ならば, $\mathfrak{g}$ も可解である (命題 5.3 (3)). $\square$

5.4 Lie の定理

定理 5.18 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元可解 Lie 代数とし, (ρ, V) をその有限次元既約表現とする.

- (1) $\rho(\mathfrak{g})$ は可換である.
- (2) $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元が三角化可能ならば^{*5}, V は 1 次元である.

証明 (1) $\mathfrak{g}$ が可解であることより $\text{nil}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ だから (定理 5.15), $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \rho(\text{nil}(\mathfrak{g})) = 0$ である.

(2) $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元が三角化可能であるとする, (1) と合わせて, $\rho(\mathfrak{g})$ は同時三角化可能である. 特に, $\rho(\mathfrak{g})$ の同時固有ベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ がとれる. ところが, ρ は既約だから, $V = \mathbb{K}v$ が成り立つ. $\square$

系 5.19 (Lie の定理) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の可解 Lie 代数, (ρ, V) をその有限次元表現とし, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は三角化可能であるとする. このとき, V の基底を適当にとれば, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の対応する行列表示が上三角行列となる.

証明 ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり (命題 3.15), 各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して, ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と書く. すると, 仮定より $\rho_i(\mathfrak{g})$ の任意の元は三角化可能だから, 定理 5.18 より V_i/V_{i+1} は 1 次元である. そこで, 各 i に対して $v_i \in V_i \setminus V_{i+1}$ をとると, $(v_{n-1}, \dots, v_0)$ は V の基底である. さらに, 各 i に対して, $\rho(\mathfrak{g})v_i \in V_i = \text{span}_{\mathbb{K}}\{v_i, \dots, v_{n-1}\}$ が成り立つ. すなわち, $\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元の基底 $(v_{n-1}, \dots, v_0)$ に関する行列表示は, 上三角行列である. $\square$

5.5 可解性に関する Cartan の判定法

命題 5.20 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, (ρ, V) をその有限次元表現とする. ρ のトレース形式を B_ρ と書くと, $B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \text{rad}(\mathfrak{g})) = 0$ が成り立つ.

^{*5} $\mathbb{K}$ が代数閉ならば, この仮定は常に満たされる.

証明 B_ρ は不変であり (命題 3.23 (1)), $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{nil}(\mathfrak{g})$ であり (定理 5.15), $\text{nil}(\mathfrak{g})$ は B_ρ の退化空間に含まれる (系 5.11 (2)). よって,

$$B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \text{rad}(\mathfrak{g})) = B_\rho(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]) \subseteq B_\rho(\mathfrak{g}, \text{nil}(\mathfrak{g})) = 0$$

である. □

補題 5.21 V を完全体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. x を V 上の線型変換とし, その Jordan 分解を (x_s, x_n) と書く. このとき, $\mathfrak{gl}(V)$ 上の線型変換 $\text{ad}(x)$ の Jordan 分解は, $(\text{ad}(x_s), \text{ad}(x_n))$ である. 特に, $\text{ad}(x_s)$ と $\text{ad}(x_n)$ は, ともに $\text{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せる.

証明 $x = x_s + x_n$ だから $\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$ であり, $[x_s, x_n] = 0$ だから $[\text{ad}(x_s), \text{ad}(x_n)] = 0$ である. x_n は冪零だから, 補題 4.6 より, $\text{ad}(x_s)$ も冪零である. x_s は半単純だから, $\mathbb{K}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{K}}$ を考えると, 係数拡大 $(x_s)_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は対角化可能である. そこで, $(x_s)_{(\overline{\mathbb{K}})}$ を対角化する $V_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ をとり, 各 i に対して $(x_s)_{(\overline{\mathbb{K}})}(e_i) = \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in \overline{\mathbb{K}}$) と書く. この基底に対応する $\mathfrak{gl}(V_{(\overline{\mathbb{K}})})$ の基底を $(E_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ と書くと, 各 i, j に対して $(\text{ad}(x_s))_{(\overline{\mathbb{K}})} E_{ij} = \text{ad}((x_s)_{(\overline{\mathbb{K}})}) E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$ だから, $\text{ad}((x_s)_{(\overline{\mathbb{K}})})$ も対角化可能である. よって, $\text{ad}(x_s)$ は半単純である.

後半の主張は, Jordan 分解に関する一般論である. □

補題 5.22 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間, M, M' を V の部分ベクトル空間であって $M' \subseteq M$ を満たすものとし,

$$T = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, M] \subseteq M'\}$$

と置く. このとき, $x \in T$ が $\text{tr}(Tx) = 0$ を満たすならば, x は冪零である.

証明 必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで, 一般性を失わず, $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する. $x \in T$ が $\text{tr}(Tx) = 0$ を満たすとする. x の Jordan 分解を (x_s, x_n) と書き, x_s を対角化する V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ をとり, 各 i に対して $x_s(e_i) = \lambda_i e_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{K}$) と書く. x が冪零であることを示すためには, すべての λ_i が 0 であることをいえばよい. そのために,

$$E = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{K}$$

と置き, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 E の双対空間 E^* が 0 であることを示す.

$f \in E^*$ を任意にとり, これに対して $y \in \mathfrak{gl}(V)$ を,

$$y(e_i) = f(\lambda_i) e_i \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

によって定める. V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に対応する $\mathfrak{gl}(V)$ の基底を E_{ij} と書くと, 各 i, j に対して,

$$\begin{aligned} \text{ad}(x_s) E_{ij} &= (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}, \\ \text{ad}(y) E_{ij} &= f(\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式 P であって, 任意の i, j に対して $P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$ を満たすもの ($\lambda_i - \lambda_j = \lambda_{i'} - \lambda_{j'}$ ならば $f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_{i'} - \lambda_{j'})$ であり, $\lambda_i - \lambda_j = 0$ ならば $f(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ だから, このような P が存在する) をとると, 上式より,

$$\text{ad}(y) = P(\text{ad}(x_s))$$

が成り立つ。一方で、補題 5.21 より、 $\text{ad}(x_s)$ は、 $\text{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せる。これら二つより、 $\text{ad}(y)$ は、 $\text{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せる。

さて、 $x \in T$ より $\text{ad}(x)M \subseteq M'$ であり、前段で示したように $\text{ad}(y)$ は $\text{ad}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せるから、 $\text{ad}(y)M \subseteq M'$ も成り立つ。すなわち、 $y \in T$ である。したがって、仮定より、

$$\sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \lambda_i = \text{tr}(yx) = 0$$

である。この等式の両辺に f を施せば、

$$\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)^2 = 0$$

を得る。各 $f(\lambda_i)$ は有理数だから、上式より、 $f(\lambda_i)$ はすべて 0 である。すなわち、 $f = 0$ である。これで、主張が示された。 $\square$

定理 5.23 (可解性に関する Cartan の判定法 I) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし、 (ρ, V) をその忠実な有限次元表現とする。このとき、次の条件は同値である。

- (a) $\mathfrak{g}$ は可解である。
- (b) ρ のトレース形式を B_ρ と書くと、 $B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$ が成り立つ。

証明 (a) $\implies$ (b) $\mathfrak{g}$ が可解ならば、 $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ だから、命題 5.20 より $B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \text{rad}(\mathfrak{g})) = 0$ である。

(b) $\implies$ (a) 一般性を失わず、 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であり、 ρ は $\mathfrak{g}$ の自然表現であると仮定する。 $B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$ であるとする。このとき、

$$T = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

と置くと、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq T$ であり、

$$\text{tr}(T[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \text{tr}([T, \mathfrak{g}]\mathfrak{g}) \subseteq \text{tr}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\mathfrak{g}) = B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$$

が成り立つ。したがって、補題 5.22 より $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の元はすべて (V 上の線型変換として) 冪零だから、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は (Lie 代数として) 冪零である (系 4.11)。よって、 $\mathfrak{g}$ は可解である (系 5.17)。 $\square$

定理 5.24 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について、根基 $\text{rad}(\mathfrak{g})$ は、 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の直交空間に等しい。

証明 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書き、これに関する $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の直交空間を $\mathfrak{r}$ と置く。系 3.24 (2) より $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり、命題 5.20 より $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{r}$ である。あとは、 $\mathfrak{r}$ が可解であることを示せばよい。 $\mathfrak{r}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}}$ のトレース形式は $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}}$ であり、 $\mathfrak{r}$ の定義よりこのトレース形式に関して $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ と $\mathfrak{r}$ は直交する。したがって、可解性に関する Cartan の判定法 (定理 5.23) より、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ は可解である。さらに、 $\text{Ker}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{r}}) = \text{Ker}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}) \cap \mathfrak{r} = \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{r}$ は可換である。よって、 $\mathfrak{r}$ は可解である (命題 5.3 (3))。 $\square$

系 5.25 (可解性に関する Cartan の判定法 II) 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して、次の条件は同値である。

- (a) $\mathfrak{g}$ は可解である。

(b) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書くと, $B_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$ が成り立つ.

証明 定理 5.24 より,

$$\mathfrak{g} \text{ が可解} \iff \text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \iff B_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$$

である. □

系 5.26 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の根基 $\text{rad}(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである.

証明 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は $\mathfrak{g}$ の特性イデアルだから (命題 1.13 (2)), その Killing 形式に関する直交空間である $\text{rad}(\mathfrak{g})$ も $\mathfrak{g}$ の特性イデアルである (定理 5.24, 系 3.24 (2)). □

系 5.27 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. このとき, $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$ が成り立つ.

証明 $\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ の可解イデアルだから (命題 5.3 (1)), $\text{rad}(\mathfrak{a})$ に含まれる. 一方で, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, $\text{rad}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の特性イデアルだから (系 5.26), $\text{rad}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである (命題 1.12 (1)). したがって, $\text{rad}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルだから, $\text{rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$ である. 以上より, $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$ が成り立つ. □

5.6 根基・冪零根基と係数体の変更

命題 5.28 $\mathbb{K}$ を可換体とし, $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする.

- (1) $\mathbb{K}$ の標数が 0 であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, $\text{rad}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = (\text{rad}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')}$ である.
- (2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ について, $\text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = (\text{rad}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]}$ である.

証明 (1) $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Killing 形式は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の係数拡大だから (命題 3.26 (2)), 定理 5.24 より $\text{rad}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = (\text{rad}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')}$ である.

(2) $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ のイデアルとする. すると, $\text{span}_{\mathbb{K}} \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}'$ のイデアルである. また, 帰納的に確かめられるように, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{D}^p(\text{span}_{\mathbb{K}} \mathfrak{a}) = \text{span}_{\mathbb{K}} \mathcal{D}^p(\mathfrak{a})$ だから, $\mathfrak{a}$ が可解ならば $\text{span}_{\mathbb{K}} \mathfrak{a}$ も可解である. このことと根基の最大性より, $\text{span}_{\mathbb{K}} \text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = \text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]})$ となるから, $\mathfrak{g}'$ のイデアル $\mathfrak{r}'$ が存在して $\text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = \mathfrak{r}'_{[\mathbb{K}]}$ が成り立つ. $\mathfrak{r}'$ が可解であることと $\mathfrak{r}'_{[\mathbb{K}]}$ が可解であることは同値だから (命題 5.2), $\mathfrak{r}' = \text{rad}(\mathfrak{g}')$ であり, $\text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = (\text{rad}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]}$ が成り立つ. □

命題 5.29 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし, $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする.

- (1) 有限次元 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, $\text{nil}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = (\text{nil}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')}$ である.
- (2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ について, $\text{nil}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = (\text{nil}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]}$ である.

証明 (1) 定理 5.15 と命題 5.28 (1) より,

$$\text{nil}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = \text{rad}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) \cap [\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} , \mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}] = (\text{rad}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{(\mathbb{K}')} = (\text{nil}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')}$$

である.

(2) 定理 5.15 と命題 5.28 (2) より,

$$\text{nil}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = \text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) \cap [\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}, \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}] = (\text{rad}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]} \cap [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']_{[\mathbb{K}]} = (\text{nil}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]}$$

である. □

6 半単純 Lie 代数

6.1 単純 Lie 代数と半単純 Lie 代数

定義 6.1 (単純 Lie 代数) 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**単純** (simple) であるとは, $\mathfrak{g}$ が可換でなく, $\mathfrak{g}$ が 0 と $\mathfrak{g}$ 以外のイデアルをもたないことをいう.

定義 6.2 (半単純 Lie 代数) 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**半単純** (semisimple) であるとは, $\mathfrak{g}$ が 0 以外の可解イデアルをもたない (あるいは同値だが, $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ である) ことをいう.

命題 6.3 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は, $\mathfrak{g}$ が 0 以外の可換イデアルをもたないことである.

証明 $\mathfrak{g}$ が可解イデアル $\mathfrak{r} \neq 0$ をもつとする. $\mathcal{D}^p(\mathfrak{r}) \neq 0$ を満たす最大の $p \in \mathbb{N}$ をとると, $\mathcal{D}^p(\mathfrak{r})$ は $\mathfrak{g}$ の 0 でないイデアルであり, $[\mathcal{D}^p(\mathfrak{r}), \mathcal{D}^p(\mathfrak{r})] = \mathcal{D}^{p+1}(\mathfrak{r}) = 0$ だから $\mathcal{D}^p(\mathfrak{r})$ は可換である. よって, $\mathfrak{g}$ が半単純である (すなわち, 0 以外の可解イデアルをもたない) ことと, 0 以外の可換イデアルをもたないことは同値である. □

系 6.4 単純 Lie 代数は, 半単純である.

証明 命題 6.3 から明らかである. □

命題 6.5 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ であり, $\mathfrak{g}$ の随伴表現は忠実である.

証明 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の可換イデアルだから, 0 である. $\mathfrak{g}$ の随伴表現の核は $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に等しいから, これは, $\mathfrak{g}$ の随伴表現が忠実であることを意味する. □

命題 6.6 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の根基 $\text{rad}(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ であって $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が半単純となるものの中で最小のものである.

証明 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとし, 等化準同型を $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と書く. $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから (命題 5.6), $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可解ならば $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) = 0$ であり, これは $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ を意味する. 一方で, 準同型定理より $f^{-1}(\text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})) \cong \text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ だから, $\mathfrak{a}$ が可解ならば $f^{-1}(\text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}))$ も可解であり (命題 5.3 (3)), $f^{-1}(\text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g})$ となる. 特に, $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{g})$ と置けば, $\text{rad}(\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})) = 0$ を得る. すなわち, $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ は半単純である. □

注意 6.7 系 6.16 で示すように, 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ について,

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \text{ が半単純} \iff \text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$$

が成り立つ.

命題 6.8 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を有限次元 Lie 代数の有限族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. すべての $\mathfrak{g}_i$ が半単純であることと, $\mathfrak{g}$ が半単純であることは同値である.

証明 $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \in I} \text{rad}(\mathfrak{g}_i)$ であること (命題 5.8) から従う. $\square$

命題 6.9 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. $\mathfrak{g}$ が半単純ならば, $\mathfrak{a}$ も半単純である.

証明 $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$ であること (系 5.27) から従う. $\square$

6.2 半単純性に関する Cartan の判定法

定理 6.10 (半単純性に関する Cartan の判定法) 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ は半単純である.
- (b) $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ であり, $\mathfrak{g}$ の任意の忠実な有限次元表現のトレース形式は非退化である.
- (c) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式は非退化である.

さらに, これらの条件の下で, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ が成り立つ.

証明 (a) $\implies$ (b), 最後の主張 $\mathfrak{g}$ が半単純であるとする. まず, $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ であることは, 命題 6.5 ですでに示した. 次に, ρ を $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現とし, そのトレース形式 B_ρ に関する $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の直交空間を $\mathfrak{a}$ と置く. すると, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである (系 3.24 (1)). さらに, $B_\rho([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \mathfrak{a}) \subseteq B_\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{a}) = 0$ だから, 可解性に関する Cartan の判定法 (定理 5.23) より, $\mathfrak{a}$ は可解である. したがって, $\mathfrak{g}$ が半単純であることより, $\mathfrak{a} = 0$ を得る. よって, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ が成り立ち, B_ρ は非退化である.

(b) $\implies$ (c) $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ ならば $\mathfrak{g}$ の随伴表現は忠実だから, 主張は明らかである.

(c) $\implies$ (a) $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を $B_{\mathfrak{g}}$ と書く. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の可換イデアルとすると, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = 0$ だから, $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})) = 0$ である. よって, $B_{\mathfrak{g}}$ が非退化ならば, $\mathfrak{g}$ は 0 以外の可換イデアルをもたず, これは $\mathfrak{g}$ が半単純であることを意味する (命題 6.3). $\square$

注意 6.11 定理 6.10 の条件は, 条件 (b) から「 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ 」を除いて得られる次の条件とも同値である.

(b') $\mathfrak{g}$ の任意の忠実な有限次元表現のトレース形式は非退化である.

このことは, Ado の定理を用いて証明できる. 詳しくは, Mathematics Stack Exchange [5] を参照のこと.

6.3 半単純 Lie 代数の分解

命題 6.12 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数, $\mathfrak{a}$ をその半単純イデアルとし, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間を $\mathfrak{a}^\perp$ と書く. このとき, $\mathfrak{a}^\perp$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, Lie 代数として $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ が成り立つ.

証明 系 3.24 (2) より $\mathfrak{a}^\perp$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, 双線型形式の一般論より $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp \geq \dim \mathfrak{g}$ である.

また, $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ の Killing 形式をそれぞれ $B_{\mathfrak{g}}, B_{\mathfrak{a}}$ と書くと, $B_{\mathfrak{a}}$ は $B_{\mathfrak{g}}$ の制限だから (命題 3.25),

$$B_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}, \mathfrak{a}) = B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}, \mathfrak{a}) \subseteq B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\perp}, \mathfrak{a}) = 0$$

が成り立つ. 半単純性に関する Cartan の判定法 (定理 6.10) より $B_{\mathfrak{a}}$ は非退化だから, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$ である. 以上より, $\mathfrak{g}$ はベクトル空間として $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}^{\perp}$ に直和分解され, これらは $\mathfrak{g}$ のイデアルだから, これは Lie 代数としての直和分解でもある. $\square$

定理 6.13 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ は半単純である.
- (b) $\mathfrak{g}$ は, 有限個の単純 Lie 代数の直和 Lie 代数として書ける.

さらに, $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の有限族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の直和 Lie 代数であるとき, $\mathfrak{g}$ のイデアルは, $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の部分族の直和で尽くされる.

証明 (a) $\implies$ (b) 命題 6.12 より, $\mathfrak{g}$ の随伴表現は完全可約だから, 既約分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ がとれる (命題 3.18). このとき, 各 $\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}$ の 0 でないイデアルの中で極小なものであり, Lie 代数として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ. 各 $\mathfrak{g}_i$ が単純であることを示す. $\mathfrak{g}$ は 0 以外の可換イデアルをもたないから, $\mathfrak{g}_i$ は可換ではない. また, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_i$ のイデアルとすると, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルでもあるから, $\mathfrak{g}_i$ の極小性より, $\mathfrak{a}$ は 0 または $\mathfrak{g}_i$ である. よって, $\mathfrak{g}_i$ は単純である.

(b) $\implies$ (a) 単純 Lie 代数は半単純であり (系 6.4), 有限個の半単純 Lie 代数の直和は半単純だから (命題 6.8), 主張が成り立つ.

最後の主張 $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の有限族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ の直和 Lie 代数であるとして, $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ を任意にとる. 各 $i \in I$ に対して, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ は単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_i$ のイデアルだから, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ または 0 である. 前者の場合, $\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{a}$ である. 後者の場合, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ であり, これは, $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i$ への射影による $\mathfrak{a}$ の像が $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}_i)$ に含まれることを意味する. ところが, $\mathfrak{g}_i$ は単純だから $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}_i) = 0$ であり, このとき, $\mathfrak{a} \subseteq \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} \mathfrak{g}_j$ となる. 以上より, $J = \{i \in I \mid \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i\}$ と置けば, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ. $\square$

系 6.14 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. このとき, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ は半単純である.
- (b) $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ はともに半単純である.

証明 (a) $\implies$ (b) $\mathfrak{g}$ が半単純であるとする. このとき, 定理 6.13 より, 単純 Lie 代数の有限族 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ と $J \subseteq I$ を用いて, Lie 代数として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}_i$ と書けているとしてよい. このとき, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}_i$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \bigoplus_{i \in I \setminus J} \mathfrak{g}_i$ は, 有限個の単純 Lie 代数の直和として書けているから, 半単純である (系 6.4, 命題 6.8).

(b) $\implies$ (a) $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ がともに半単純であるとする. このとき, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\mathfrak{a}$ の直交空間を $\mathfrak{a}^{\perp}$ と書くと, Lie 代数として $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ が成り立つ (命題 6.12). よって, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は半単純である (命題 6.8). $\square$

注意 6.15 半単純 Lie 代数の部分 Lie 代数は, 半単純であるとは限らない. たとえば, 1 次元 Lie 代数は可換だから, 半単純ではない.

系 6.16 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする. このとき, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は半単純である.
- (b) $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ である.

証明 命題 6.6 で示したように, 根基 $\text{rad}(\mathfrak{g})$ は, $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ であって $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が半単純となるものの中で最小のものである. また, 系 6.14 より, 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数の商は, また半単純である. これらのことから, 主張が従う. $\square$

系 6.17 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を全射準同型とする. このとき, $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) = \text{rad}(\mathfrak{h})$ である.

証明 まず, $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{h})$ であることは, 命題 5.6 ですでに示した. 次に, 命題 5.6 より $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ は半単純だから, その商 Lie 代数に同型な $\mathfrak{h}/f(\text{rad}(\mathfrak{g}))$ も半単純であり (系 6.14), したがって, ふたたび命題 5.6 より $\text{rad}(\mathfrak{h}) \subseteq f(\text{rad}(\mathfrak{g}))$ である. よって, $f(\text{rad}(\mathfrak{g})) = \text{rad}(\mathfrak{h})$ が成り立つ. $\square$

命題 6.18 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現は, $\mathfrak{g}$ から $\text{Der}(\mathfrak{g})$ への同型を与える. 特に, $\mathfrak{g}$ 上の導分は, すべて内部導分である.

証明 $\mathfrak{g}$ の随伴表現が忠実であることは, 命題 6.5 ですでに示した. あとは, $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})$ であることを示せばよい. $\text{ad}(\mathfrak{g})$ は $\text{Der}(\mathfrak{g})$ の半単純イデアルだから (命題 1.9 (1)), $\text{Der}(\mathfrak{g})$ の Killing 形式に関する $\text{ad}(\mathfrak{g})$ の直交空間を $\text{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ と書くと, Lie 代数として $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \text{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ が成立する (命題 6.12). $D \in \text{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ とすると, 命題 1.9 (1) より

$$\text{ad}(D(\mathfrak{g})) = [D, \text{ad}(\mathfrak{g})] \subseteq [\text{ad}(\mathfrak{g})^\perp, \text{ad}(\mathfrak{g})] = 0$$

であり, すでに述べたように ad は忠実だから, $D = 0$ である. よって, $\text{ad}(\mathfrak{g})^\perp = 0$ であり, 上記の直和分解と合わせて, $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$ を得る. $\square$

6.4 Weyl の完全可約性定理

補題 6.19 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現は完全可約である.
- (b) (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現, W を V の余次元 1 の部分ベクトル空間とし, これらが $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ を満たすとする, W は V において $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間をもつ.

証明 (a) $\implies$ (b) 明らかである.

(b) $\implies$ (a) (b) が成り立つとする. $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (σ, M) を任意にとり, $N \neq 0$ を M の $\sigma(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間として, N の M における $\sigma(\mathfrak{g})$ 安定な補空間が存在することを示す. $\mathfrak{g}$ の $\text{End}(M)$ 上の表現 $\rho = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(M)} \circ \sigma$ を考え, $\text{End}(M)$ の部分ベクトル空間 V, W を

$$\begin{aligned} V &= \{u \in \text{End}(M) \mid u(M) \subseteq N \text{ かつ } u|_N \text{ はスカラー倍}\}, \\ W &= \{u \in \text{End}(M) \mid u(M) \subseteq N \text{ かつ } u|_N = 0\} \end{aligned}$$

と定める. V は $\rho(\mathfrak{g})$ 安定であり, W は V の余次元 1 の部分ベクトル空間であり, $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ が満たされるから, 仮定より, W は V において $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間 $\mathbb{K}u$ をもつ. $u \in V \setminus W$ であることより $u|_N$ は 0 でないスカラー倍だから, 必要ならば u を適当にスカラー倍することで, $u|_N = \text{id}_N$ であるとしてよい. また, $N = u(N) \subseteq u(M)$ であり, 一方で $u \in V$ より $u(M) \subseteq N$ だから, $u(M) = N$ である. したがって, u は N の上への射影だから, $\text{Ker}(u)$ は N の M における補空間である. さらに, 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して, $\rho(x)u \in \rho(x)V \subseteq W$ かつ $\rho(x)\mathbb{K}u \subseteq \mathbb{K}u$ であることより $\rho(x)u = 0$ だから, $\sigma(x) \circ u = u \circ \sigma(x)$ が成り立つ. したがって, $\text{Ker}(u)$ は $\sigma(\mathfrak{g})$ 安定である. これで, 主張が示された. $\square$

定理 6.20 (Weyl の完全可約性定理) 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, その任意の有限次元表現は, 完全可約である.

証明 補題 6.19 より, (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現, W を V の余次元 1 の部分ベクトル空間とし, これらが $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ を満たすとして, W が V において $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間をもつことを示せばよい. 以下, ρ の W 上の部分表現を, ρ' と書く.

$\rho' = 0$ である場合, 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)\rho(y)V \subseteq \rho'(x)W = 0$ より $\rho(x)\rho(y) = 0$ だから, $\rho(\mathfrak{g}) = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ である (定理 6.10). よって, ρ は明らかに完全可約である. 以下, $\rho' \neq 0$ である場合を考える.

まず, ρ' が既約である場合を考える. ρ' のトレース形式を $B_{\rho'}$ と書く. $\text{Ker}(\rho')$ は $\mathfrak{g}$ の半単純イデアルだから (系 6.14), $\mathfrak{g}$ の Killing 形式に関する $\text{Ker}(\rho')$ の直交空間を $\mathfrak{a}$ と置くと, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ における $\text{Ker}(\rho')$ の補イデアルとなる (命題 6.12). そこで, $\mathfrak{a}$ の W 上の表現 $\rho'|_{\mathfrak{a}}$ を考えると, これは忠実だから, そのトレース形式 $B_{\rho'}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$ は非退化である (定理 6.10). したがって, Casimir 元 $c \in \mathbf{Z}(\mathbf{U}(\mathfrak{g}))$ が定まり, $\rho'(c) = \rho(c)|_W$ は W の $\mathfrak{g}$ 自己同型となる (命題 3.29 (3)). $\rho' \neq 0$ より $\mathfrak{a} \neq 0$ であり, 係数体 $\mathbb{K}$ の標数が 0 であることに注意する). さらに, 仮定 $\rho(\mathfrak{g})V \subseteq W$ より, $\rho(c)V \subseteq W$ が成り立つ. 以上より, $\text{Ker}(\rho(c))$ は W の V における $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間である.

次に, 一般の場合を, V の次元に関する帰納法で示す. $\dim V = 1$ ならば $W = 0$ であり, 主張は明らかである. $\dim V \geq 2$ であるとし, 次元がより小さい場合には主張が正しいとする. このとき, $W \neq 0$ だから, W の 0 でない $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な部分ベクトル空間の中で極小なもの M がとれる. ρ の V/M 上の商表現を $\bar{\rho}$ と書くと, W/M は V/M の余次元 1 の部分ベクトル空間であり, これらは $\bar{\rho}(\mathfrak{g})(W/M) \subseteq V/M$ を満たすから, 帰納法の仮定より, W/M の V/M における $\bar{\rho}(\mathfrak{g})$ 安定な補空間 L/M がとれる. ここで, L は V の $\mathfrak{g}$ 安定な部分ベクトル空間であり, M を余次元 1 の部分ベクトル空間として含み, $L \cap W = M$ を満たす. $\rho(\mathfrak{g})L \subseteq L \cap W = M$ であり, M の極小性より ρ の M 上の部分表現は既約だから, 前段の結果より, M は L における $\rho(\mathfrak{g})$ 安定な補空間をもつ. この補空間は, W の V における補空間でもある. これで, 帰納法が完成した. $\square$

注意 6.21 Weyl の完全可約性定理 (定理 6.20) の逆として, 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現が完全可約ならば, $\mathfrak{g}$ は半単純である. このことを示そう.

主張の仮定の下で, $\mathfrak{g}$ の任意の可換イデアル $\mathfrak{a}$ が 0 であることを示せばよい (命題 6.3). $\mathfrak{g}$ の随伴表現が完全可約であることより, $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{g}$ における補イデアル $\mathfrak{b}$ がとれる. この $\mathfrak{b}$ について, $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}$ が成り立つ. そこで, $\mathfrak{a} \neq 0$ であると仮定すると, $\mathfrak{a}$ は 1 次元の商 Lie 代数をもつから, $\mathfrak{g}$ についても同様である. 1 次元 Lie 代数は完全可約でない 2 次元表現

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をもつから、 $\mathfrak{g}$ についても同様となるが、これは仮定に反する。よって、背理法より、 $\mathfrak{a} = 0$ である。これで、主張が示された。

6.5 簡約 Lie 代数

定義 6.22 (簡約 Lie 代数) 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**簡約** (reductive) であるとは、その随伴表現が完全可約であることをいう。

定理 6.23 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して、次の条件は同値である。

- (a) $\mathfrak{g}$ は簡約である。
- (b) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は半単純である。
- (c) $\mathfrak{g}$ は、半単純 Lie 代数と可換 Lie 代数の直和 Lie 代数として書ける。
- (d) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現であって、非退化なトレース形式をもつものが存在する。
- (e) $\mathfrak{g}$ は忠実な有限次元完全可約表現をもつ。
- (f) $\text{nil}(\mathfrak{g}) = 0$ である。
- (g) $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] = 0$ である。
- (h) $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ である。

さらに、 $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{s}$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ の直和 Lie 代数であるとき、 $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ かつ $\mathfrak{z} = \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \text{rad}(\mathfrak{g})$ である。

証明 (a) $\implies$ (b) $\mathfrak{g}$ が簡約であるとする、 $\mathfrak{g}$ の随伴表現の既約分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ がとれる (命題 3.18)。このとき、各 $\mathfrak{g}_i$ は $\mathfrak{g}$ の 0 でないイデアルの中で極小なものであり、Lie 代数として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ。各 $i \in I$ について、 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_i$ のイデアルとすると、 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルでもあるから、 $\mathfrak{g}_i$ の極小性より、 $\mathfrak{a}$ は 0 または $\mathfrak{g}_i$ である。したがって、 $\mathfrak{g}_i$ は可換または単純である。 $\mathfrak{g}_i$ が可換ならば $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = 0$ であり、単純ならば $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ だから、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は単純な $\mathfrak{g}_i$ 全体の直和となる。よって、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は半単純である (系 6.4, 命題 6.8)。

(b) $\implies$ (c) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が半単純であるとする、 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の $\mathfrak{g}$ における補イデアル $\mathfrak{z}$ がとれ、Lie 代数として $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$ が成り立つ (命題 6.12)。このとき、 $\mathfrak{z} \cong \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ だから、 $\mathfrak{z}$ は可換である。

(c) $\implies$ (d) $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{s}$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ の直和 Lie 代数であるとする。 $\mathfrak{z}$ の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ を一つ固定し、 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{s} \oplus \mathbb{K}^n$ 上の表現 ρ を

$$\rho\left(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \text{ad}_{\mathfrak{s}}(x) \oplus \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (x \in \mathfrak{s}, \lambda_i \in \mathbb{K})$$

によって定めると、 ρ のトレース形式 B_ρ は

$$B_\rho\left(x + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, y + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i\right) = B_{\mathfrak{s}}(x, y) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \quad (x, y \in \mathfrak{s}, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K})$$

で与えられる (ここで、 $B_{\mathfrak{s}}$ は $\mathfrak{s}$ の Killing 形式を表す)。半単純性に関する Cartan の判定法 (定理 6.10) より、 $B_{\mathfrak{s}}$ は非退化だから、 B_ρ も非退化である。

(d) $\implies$ (e) $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) が非退化なトレース形式 B_ρ をもつとする。 ρ の組成列 $(V_0, \dots, V_n)$ をとり (命題 3.15)、各 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して、 ρ が誘導する $\mathfrak{g}$ の V_i/V_{i+1} 上の既約表現を ρ_i と

書く． $\rho' = \rho_0 \oplus \cdots \oplus \rho_{n-1}$ と置くと， ρ' は $\mathfrak{g}$ の有限次元完全可約表現である． ρ' が忠実であることを示す． $x \in \text{Ker}(\rho')$ とすると，各 i に対して $\rho(x)V_i \subseteq V_{i+1}$ である．さらに，各 V_i は $\rho(\mathfrak{g})$ 安定だから， $\rho(x)\rho(\mathfrak{g})V_i \subseteq V_{i+1}$ である．したがって， $\rho(x)\rho(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零だから， $B_\rho(x, \mathfrak{g}) = \text{tr}(\rho(x)\rho(\mathfrak{g})) = 0$ であり， B_ρ が非退化であることより $x = 0$ を得る．よって， ρ' は忠実である．

(e) $\implies$ (f) $\text{nil}(\mathfrak{g}) = 0$ であるとする． $\mathfrak{g}$ の有限個の有限次元既約表現 $\rho_1, \dots, \rho_n$ が存在して， $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\rho_i) = 0$ となる．このとき， $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ は $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元完全可約表現である（命題 3.18）．

(f) $\implies$ (g) 定理 5.15 より $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{nil}(\mathfrak{g})$ だから， $\text{nil}(\mathfrak{g}) = 0$ ならば $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] = 0$ である．

(g) $\iff$ (h) $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g})$ は常に成り立つから，

$$\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \iff \text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \iff [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] = 0$$

である．

(h) $\implies$ (a) $\mathfrak{g}$ の随伴表現は， $\mathfrak{g}/\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現 ρ を誘導する．ここで， $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \text{rad}(\mathfrak{g})$ であるとする． $\mathfrak{g}/\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ は半単純だから（命題 6.6），Weyl の完全可約性定理（定理 6.20）より， ρ は完全可約となる．よって，このとき， $\mathfrak{g}$ の随伴表現も完全可約である．

最後の主張 $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{s}$ と可換 Lie 代数 $\mathfrak{z}$ の直和 Lie 代数であるとする．このとき， $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \oplus [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = \mathfrak{s}$ である（定理 6.10）．また， $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbf{Z}(\mathfrak{s}) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$ であり（命題 6.5），(h) よりこれは $\text{rad}(\mathfrak{g})$ にも等しい． $\square$

命題 6.24 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について， $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ が成り立つ．

証明 $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であることは定理 5.15 ですでに示しており， $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であることは明らかである． $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ であることを示す． $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ と置き，等化準同型を $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ と書く．すると，命題 5.12 より， $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{nil}(\mathfrak{g}')$ である．一方で，系 6.17 より

$$[\mathfrak{g}', \text{rad}(\mathfrak{g}')] = [f(\mathfrak{g}), f(\text{rad}(\mathfrak{g}))] = f([\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]) = 0$$

だから，定理 6.23 より $\text{nil}(\mathfrak{g}') = 0$ である．以上より， $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) = 0$ であり，これは $\text{nil}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ を意味する． $\square$

系 6.25 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし， $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を全射準同型とする．このとき， $f(\text{nil}(\mathfrak{g})) = \text{nil}(\mathfrak{h})$ である．

証明 命題 6.24 と系 6.17 より，

$$f(\text{nil}(\mathfrak{g})) = f([\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]) = [f(\mathfrak{g}), f(\text{rad}(\mathfrak{g}))] = [\mathfrak{h}, \text{rad}(\mathfrak{h})] = \text{nil}(\mathfrak{h})$$

である． $\square$

6.6 単純性・半単純性・簡約性と係数体の変更

命題 6.26 $\mathbb{K}$ を可換体とし， $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする．

- (1) $\mathbb{K}$ の標数が 0 であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であることと, その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が半単純であることは同値である.
- (2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が半単純であることと, その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が半単純であることは同値である.

証明 (1) $\text{rad}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = (\text{rad}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')}$ であること (命題 5.28 (1)) から従う.

- (2) $\text{rad}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = (\text{rad}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]}$ であること (命題 5.28 (2)) から従う. $\square$

命題 6.27 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし, $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする.

- (1) 有限次元 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について, その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が単純ならば, $\mathfrak{g}$ は単純である.
- (2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が単純であることと, その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が単純であることは同値である.

証明 (1) $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が単純であるとする. 命題 6.26 (1) より $\mathfrak{g}$ は半単純だから, $\mathfrak{g}$ は有限個の単純 Lie 代数の直和として $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ と書ける (定理 6.13). このとき, $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} = (\mathfrak{g}_1)_{(\mathbb{K}')} \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_n)_{(\mathbb{K}')}$ だが, $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ は単純だから, $n = 1$ である. よって, $\mathfrak{g}$ は単純である.

(2) $\mathfrak{g}'$ のイデアルは $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ のイデアルでもあるから, $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が単純ならば, $\mathfrak{g}'$ も単純である. 逆に, $\mathfrak{g}'$ が単純であるとする. このとき, $\mathfrak{g}'$ は可換でないから, $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ も可換でない. また, 命題 6.26 (2) より, $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ は半単純である. そこで, α を $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ のイデアルとすると, $\alpha = [\alpha, \mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}]$ が成り立つから (定理 6.13), $\text{span}_{\mathbb{K}'} \alpha = \alpha$ となり, α は $\mathfrak{g}'$ のイデアルでもある. したがって, α は 0 または $\mathfrak{g}'$ である. よって, $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ は単純である. $\square$

注意 6.28 命題 6.27 (1) の逆は成り立たない. すなわち, $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とすると, 単純 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が単純であるとは限らない.

命題 6.29 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし, $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする.

- (1) 有限次元 $\mathbb{K}$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が簡約であることと, その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ が簡約であることは同値である.
- (2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする. このとき, 有限次元 $\mathbb{K}'$ -Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ が簡約であることと, その係数の制限 $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ が簡約であることは同値である.

証明 (1) 命題 5.29 の (a) $\iff$ (f) と, $\text{nil}(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}) = (\text{nil}(\mathfrak{g}))_{(\mathbb{K}')}$ であること (命題 5.29 (1)) から従う.

- (2) 命題 5.29 の (a) $\iff$ (f) と, $\text{nil}(\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}) = (\text{nil}(\mathfrak{g}'))_{[\mathbb{K}]}$ であること (命題 5.29 (2)) から従う. $\square$

6.7 半単純 Lie 代数の半単純元と冪零元

定理 6.30 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の半単純部分 Lie 代数とする. 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して, その Jordan 分解を (x_s, x_n) とすると, $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ である.

証明 命題 6.26 (1) より, 必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで, 一般性を失わず, 係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する.

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ とし, その Jordan 分解を (x_s, x_n) とする. すると, $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n)$ は $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)$ の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せるから (補題 5.21), $\mathfrak{g}$ が $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)$ 安定ならば, $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n)$ 安定でもある. すなわち, $x \in \mathbf{N}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ ならば $x_n \in \mathbf{N}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ である. 次に, 部分ベクトル空間 $W \subseteq V$ に対して, $\mathfrak{gl}(V)$

の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}_W$ を,

$$\mathfrak{h}_W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid W \text{ は } x \text{ 安定かつ } x|_W \in \mathfrak{sl}(W)\}$$

と定める. すると, x_n は x の定数項をもたない $\mathbb{K}$ 係数多項式として表せるから, W が x 安定ならば, x_n 安定でもある. また, x_n は常に冪零だから, W が x_n 安定ならば, $x_n|_W$ も冪零であり, したがって特に, $x_n|_W \in \mathfrak{sl}(W)$ である. よって, $x \in \mathfrak{h}_W$ ならば $x_n \in \mathfrak{h}_W$ である.

前段の結果より, 主張を示すためには,

$$\mathfrak{g} = \mathbf{N}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \cap \bigcap_{W \text{ は } V \text{ の } \mathfrak{g} \text{ 安定な部分ベクトル空間}} \mathfrak{h}_W$$

を示せばよい. 上式の右边を $\mathfrak{g}'$ と置くと, これは $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である. また, $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であることより $\mathfrak{g} \subseteq \mathbf{N}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ であり, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (定理 6.10) より $\mathfrak{g}$ 安定な部分ベクトル空間 $W \subseteq V$ に対して $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}_W$ だから, $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}' \subseteq \mathbf{N}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ である. したがって, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}'$ の半単純イデアルだから, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}'$ における補イデアル $\mathfrak{a}$ がとれる (命題 6.12). $\mathfrak{a} = 0$ を示す. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = 0$ だから, $\mathfrak{a}$ の各元は, $\mathfrak{g}$ の V 上の自然表現に関して $\mathfrak{g}$ 同変である. また, 係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉だから, Schur の補題 (命題 3.13 (2)) より, $\mathfrak{a}$ の各元は, $\mathfrak{g}$ の自然表現の各既約部分表現上でスカラー倍である. 一方で, $\mathfrak{g}$ の自然表現の任意の既約部分表現に対応する $\mathfrak{g}$ 安定な部分ベクトル空間 $W \subseteq V$ に対して, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{h}_W$ より $\mathfrak{a}$ の各元の W への制限は $\mathfrak{sl}(W)$ に属する. したがって, このスカラー倍は 0 である. Weyl の完全可約性定理 (定理 6.20) より, $\mathfrak{g}$ の自然表現は完全可約だから, 上記のことと合わせて, $\mathfrak{a} = 0$ を得る. これで, 主張が示された. $\square$

系 6.31 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の半単純部分 Lie 代数とする.

- (1) V 上の線型写像 $x \in \mathfrak{g}$ が半単純であることと, $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ が半単純であることは同値である.
- (2) V 上の線型写像 $x \in \mathfrak{g}$ が冪零であることと, $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ が冪零であることは同値である.

証明 V 上の線型写像 $x \in \mathfrak{g}$ の Jordan 分解を (x_s, x_n) とすると, 定理 6.30 より, $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ である. また, 補題 5.21 より $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)$ の Jordan 分解は $(\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s), \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n))$ だから, その制限である $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ の Jordan 分解は $(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n))$ である. 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現が忠実であること (命題 6.5) と合わせて,

$$x \text{ が半単純} \iff x_n = 0 \iff \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n) = 0 \iff \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \text{ が半単純}$$

および

$$x \text{ が冪零} \iff x_s = 0 \iff \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) = 0 \iff \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \text{ が冪零}$$

を得る. $\square$

命題 6.32 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とする.

- (1) $x \in \mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.
 - (a) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) に対して, V 上の線型写像 $\rho(x)$ は半単純である.
 - (b) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}(x)$ は半単純である.
 - (c) $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現 (ρ, V) であって, V 上の線型写像 $\rho(x)$ が半単純であるものが存在する.
- (2) $x \in \mathfrak{g}$ に対して, 次の条件は同値である.
 - (a) $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) に対して, V 上の線型写像 $\rho(x)$ は冪零である.

(b) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}(x)$ は冪零である.

(c) $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現 (ρ, V) であって, V 上の線型写像 $\rho(x)$ が冪零であるものが存在する.

証明 どちらも同様だから, (1) のみを示す.

(a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) 明らかである.

(c) $\implies$ (a) W を有限次元ベクトル空間, $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(W)$ の半単純部分 Lie 代数, $x \in \mathfrak{g}$ とし, x は (W 上の線型写像として) 半単純であるとする. $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) に対して, $\rho(x)$ が半単純であることを示せばよい. $\mathfrak{g}$ は半単純であり, $\text{Ker}(\rho)$ はそのイデアルだから, その補イデアル $\mathfrak{a}$ がとれ, Lie 代数として $\mathfrak{g} = \text{Ker}(\rho) \oplus \mathfrak{a}$ が成り立つ (定理 6.13). $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ をこの直和分解に関する射影とする. いま, x は半単純だから, 系 6.31 より $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ も半単純であり, したがって, その制限である $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(p(x))$ も半単純である. $\rho|_{\mathfrak{a}}$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ の忠実な有限次元表現だから, ふたたび系 6.31 より, $\rho(x) = \rho(p(x))$ も半単純である. これで, 主張が示された. $\square$

定義 6.33 (半単純 Lie 代数の半単純元・冪零元) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とする.

(1) $x \in \mathfrak{g}$ が**半単純** (semisimple) であるとは, 命題 6.32 (1) の同値な条件を満たすことをいう.

(2) $x \in \mathfrak{g}$ が**冪零** (nilpotent) であるとは, 命題 6.32 (2) の同値な条件を満たすことをいう.

定理 6.34 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とする. 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して, 半単純元 $x_s \in \mathfrak{g}$ と冪零元 $x_n \in \mathfrak{g}$ であって $x = x_s + x_n$ かつ $[x_s, x_n] = 0$ を満たすものが, 一意に存在する.

証明 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現は忠実だから (命題 6.5), $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ が主張の条件を満たすことは, $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}(x_s)$ と $\text{ad}(x_n)$ が $\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$ かつ $[\text{ad}(x_s), \text{ad}(x_n)] = 0$ を満たすことと同値である. $\text{ad}(x)$ の半単純成分と冪零成分は $\text{ad}(\mathfrak{g})$ に属するから (定理 6.30), このような x_s と x_n は, 一意に存在する. $\square$

定義 6.35 (半単純 Lie 代数における Jordan 分解) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とする. $x \in \mathfrak{g}$ に対して, $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ を定理 6.34 のようにとるとき, (x_s, x_n) を x の**Jordan 分解** (Jordan decomposition) という. また, x_s を x の**半単純成分** (semisimple component) といい, x_n を x の**冪零成分** (nilpotent component) という.

命題 6.36 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とし, $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を Lie 代数の準同型とする.

(1) f は, $\mathfrak{g}$ の半単純元を $\mathfrak{h}$ の半単純元に移し, $\mathfrak{g}$ の冪零元を $\mathfrak{h}$ の冪零元に移す.

(2) $x \in \mathfrak{g}$ の Jordan 分解を (x_s, x_n) とすると, $f(x) \in \mathfrak{h}$ の Jordan 分解は $(f(x_s), f(x_n))$ である.

(3) f が単射であるとする. このとき, $x \in \mathfrak{g}$ が半単純であることと $f(x) \in \mathfrak{h}$ が半単純であることは同値であり, x が冪零であることと $f(x)$ が冪零であることは同値である.

証明 (1) (ρ, V) を $\mathfrak{h}$ の有限次元表現とすると, $(\rho \circ f, V)$ は $\mathfrak{g}$ の有限次元表現である. よって, 主張は, 命題 6.32 の条件 (c) による半単純元・冪零元の定義から従う.

(2) $x = x_s + x_n$ より $f(x) = f(x_s) + f(x_n)$ であり, $[x_s, x_n] = 0$ より $[f(x_s), f(x_n)] = 0$ である. また, $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ はそれぞれ半単純, 冪零だから, (1) より, $f(x_s), f(x_n) \in \mathfrak{h}$ はそれぞれ半単純, 冪零である. よって, $(f(x_s), f(x_n))$ は $f(x)$ の Jordan 分解である.

(3) f の単射性と (2) より,

$$x \text{ が半単純} \iff x_n = 0 \iff f(x_n) = 0 \iff f(x) \text{ が半単純}$$

および

$$x \text{ が冪零} \iff x_s = 0 \iff f(x_s) = 0 \iff f(x) \text{ が冪零}$$

を得る. □

6.8 半単純 Lie 代数の例

命題 6.37 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする.

- (1) $\mathfrak{gl}(V)$ は簡約である.
- (2) $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ であり, これは半単純である.

証明 (1) $\mathfrak{gl}(V)$ の自然表現は, 明らかに既約 (したがって特に, 完全可約) である. よって, 定理 6.23 の (a) $\iff$ (e) より, $\mathfrak{gl}(V)$ は簡約である.

(2) (1) で示したように $\mathfrak{gl}(V)$ は簡約だから, 定理 6.23 より, $\mathfrak{gl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{gl}(V))$ であり, $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ は半単純である. 一方で, 容易に確かめられるように $\mathbf{Z}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathbb{K}\mathrm{id}_V$ であり, $\mathfrak{sl}(V)$ はこれの $\mathfrak{gl}(V)$ における補空間である. さらに, トレースの性質より, $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ である. 以上より, $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ であり, これは半単純である. □

命題 6.38 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする.

- (1) $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を非退化対称双線型形式とする. このとき, $\dim V \neq 2$ ならば $\mathfrak{o}(V, \Phi)$ は半単純であり, $\dim V = 2$ ならば $\mathfrak{o}(V, \Phi)$ は 1 次元 (したがって, 可換) である.
- (2) $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を非退化交代双線型形式とする. このとき, $\mathfrak{sp}(V, \Phi)$ は半単純である.

証明 $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を対称または交代な非退化双線型形式とし, $\mathfrak{o}(V, \Phi)$ または $\mathfrak{sp}(V, \Phi)$ を $\mathfrak{g}_\Phi$ と書く. $x \in \mathfrak{gl}(V)$ の Φ に関する随伴を $x^* \in \mathfrak{gl}(V)$ と書く (すなわち, x^* を, 任意の $v, w \in W$ に対して $\Phi(x(v), w) = \Phi(v, x^*(w))$ を満たすという性質によって特徴付けられる $\mathfrak{gl}(V)$ の元とする) と,

$$\mathfrak{g}_\Phi = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x + x^* = 0\}$$

である.

まず, $\mathfrak{g}_\Phi$ が簡約であることを示す. そのためには, $\mathfrak{g}_\Phi$ の自然表現のトレース形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ が非退化であることをいえばよい (定理 6.23). $x \in \mathfrak{g}_\Phi$ がこのトレース形式の退化空間に含まれるとして, $y \in \mathfrak{gl}(V)$ を任意にとる. すると, $y - y^* \in \mathfrak{g}_\Phi$ だから, $\mathrm{tr}(x(y - y^*)) = 0$, すなわち $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(xy^*)$ である. したがって,

$$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(xy^*) = \mathrm{tr}(yx^*)^* = \mathrm{tr}(yx^*) = -\mathrm{tr}(yx) = -\mathrm{tr}(xy)$$

だから, $\mathrm{tr}(xy) = 0$ である. 容易に確かめられるように, $\mathfrak{gl}(V)$ 上の双線型形式 $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ は非退化だから, これが任意の $y \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して成り立つことより, $x = 0$ を得る. よって, $\mathfrak{g}_\Phi$ の自然表現のトレース形式は非退化である.

あとは、 Φ が対称かつ $\dim V = 2$ である場合に $\mathfrak{g}_\Phi$ が 1 次元であることと、それ以外の場合に $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}_\Phi) = 0$ であることを示せばよい (定理 6.23)。

(1) Φ が対称であるとして、 $\mathfrak{g}_\Phi = \mathfrak{o}(V, \Phi)$ に関する主張を示す。命題 6.26 (1) より、必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで、一般性を失わず、係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する。このとき、対称双線型形式の一般論より、 V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ であって $\Phi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} は Kronecker のデルタ) を満たすものが存在する。よって、

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}$$

に対して主張を示せば十分である。

$n = 0, 1$ の場合、 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = 0$ である。 $n = 2$ の場合、 $\mathfrak{o}(2, \mathbb{K}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。よって、これらの場合には、主張が成り立つ。

$n \geq 3$ の場合を考える。 $X = (x_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbf{Z}(\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}))$ を任意にとる。まず、 $X \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ だから、任意の i に対して $x_{ii} = 0$ である。次に、任意の異なる二つの添字 k, l に対して、 X は $E_{kl} - E_{lk} \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ と可換だから、任意の $i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k, l\}$ に対して $x_{kj} = x_{lj} = x_{ik} = x_{il} = 0$ が成り立つ。 $n \geq 3$ であることより、任意の異なる二つの添字 k, j に対して、 i, l を適当にとれば $i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k, l\}$ が満たされるから、 $x_{kj} = 0$ を得る。よって、 $X = 0$ である。これで、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})) = 0$ であることが示された。

(2) Φ が交代であるとして、 $\mathfrak{g}_\Phi = \mathfrak{sp}(V, \Phi)$ の中心が 0 であることを示す。命題 6.26 (1) より、必要ならば代数閉包への係数拡大を考えることで、一般性を失わず、係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する。このとき、交代双線型形式の一般論より、 V の基底 $(e_1, \dots, e_{2n})$ であって

$$\Phi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (j = i + n) \\ -1 & (j = i - n) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

を満たすものが存在する。よって、

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) \mid J_n X + X^T J_n = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), B, C \in \text{Sym}(n, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

($J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ であり、 $\text{Sym}(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の n 次対称行列全体のなす空間を表す) の中心が 0 であることを示せば十分である。

$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}))$ を任意にとる。まず、任意の $A' \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ に対して、 X は $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & -A'^T \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と可換だから、特に A は A' と可換である。これより、 $A \in \mathbf{Z}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})) = \mathbb{K}I_n$ となるから、 $A = \lambda I_n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) と書ける。次に、 X は $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と可換だから、 $\lambda = 0$ かつ $B = 0$ が成り立つ。同様に、 X が $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ と可換であることから、 $C = 0$ であることもわかる。よって、 $X = 0$ である。これで、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})) = 0$ が示された。□

注意 6.39 命題 6.37 と命題 6.38 で半単純性を示した Lie 代数のうち、次のものは、単純であることが知られている (以下、 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする)。

- $\mathfrak{sl}(V)$ ($V \neq 0$)
- $\mathfrak{o}(V, \Phi)$ ($\dim V = 3$ または $\dim V \geq 5$, $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ は非退化対称双線型形式)
- $\mathfrak{sp}(V, \Phi)$ ($V \neq 0$, $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ は非退化交代双線型形式)

参考文献

- [1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1*, Springer, 2007.
- [2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.
- [3] O. Nash, “Engel’s Theorem in Mathlib”, *Journal of Automated Reasoning* **67**.18 (2023).
- [4] Mathematics Stack Exchange, “When is the Killing form null?”.
<https://math.stackexchange.com/q/310272>
- [5] Mathematics Stack Exchange, “Semisimplicity of Lie algebras and non-degeneracy of associated bilinear forms of representations”.
<https://math.stackexchange.com/q/3980952>