

ルート系

<https://socculus.com>

2026 年 8 月 15 日

概要

ルート系の一般論を解説する．ルート系やそれに関連する概念を定義し，その基本的な性質を見たあと，ルート系の Dynkin 図形による分類について述べる．

目次

記号と用語	2
1 ルート系	2
1.1 鏡映	2
1.2 ルート系	3
1.3 部分ルート系	5
1.4 双対ルート系	6
1.5 ルート系の直和と既約分解	7
1.6 二つのルートの関係	9
1.7 被約ルート系への帰着	13
2 ルート系の基底	14
2.1 基底	14
2.2 基底と Weyl 群	17
2.3 単純ルートの和	19
2.4 双対ルート系の基底	20
2.5 正ルート全体のなす集合の特徴付け	21
3 整ベクトルと優整ベクトル	22
3.1 整ベクトルと優整ベクトル	22
3.2 優整ベクトルと Weyl 群	23
4 ルート系の分類	24
4.1 Cartan 行列と Dynkin 図形	24
4.2 Dynkin 図形の分類	25
4.3 被約な既約ルート系の構成と分類	30
4.4 被約でない既約ルート系の構成と分類	33

記号と用語

- 本稿を通して、 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする．特に断らなければ、ベクトル空間の係数体は $\mathbb{K}$ とする．

1 ルート系

1.1 鏡映

定義 1.1 (鏡映) $n \geq 1$ を整数とし、 V を n 次元ベクトル空間とする． V から自身への線型写像であって、1 を重複度 $n-1$ の固有値とし、 -1 を重複度 1 の固有値とするものを、 V 上の**鏡映** (reflection) という．鏡映 s に対して、その固有値 1 の固有空間を**鏡映面**、固有値 -1 の固有空間を**鏡映軸**という．

V を有限次元ベクトル空間とすると、 $\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して、線型写像 $s_{\alpha,f}: V \rightarrow V$ を

$$s_{\alpha,f}(v) = v - f(v)\alpha \quad (v \in V)$$

と定める． $f(\alpha) = 2$ ならば、 $s_{\alpha,f}$ は $\text{Ker } f$ を鏡映面、 $\mathbb{K}\alpha$ を鏡映軸とする鏡映である．逆に、 V 上の任意の鏡映は、このように書ける（ただし、 α と f の選び方には 1 次元分の自由度がある）．本節の以下の部分では、この記号 $s_{\alpha,f}$ を断りなく用いる．

命題 1.2 V を有限次元ベクトル空間、 Δ をその有限部分集合とし、 Δ は V を張るとする． σ と τ は V 上の線型同型写像であり、 $\sigma^2 = \tau^2 = \text{id}_V$ を満たし、これらの固有値 -1 の固有空間は一致し、これらはともに Δ を安定にするとする．このとき、 $\sigma = \tau$ が成り立つ．

証明 σ と τ の共通の固有値 -1 の固有空間を、 W と置く． $v \in V$ とすると、 $\sigma(v) - v, \tau(v) - v \in W$ より $\sigma\tau(v) - v = \sigma(\tau(v) - \sigma(v)) = \sigma((\tau(v) - v) - (\sigma(v) - v)) \in W$ であり、 $\sigma\tau$ は W 上では恒等写像だから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)^n(v) - v &= \sum_{i=0}^{n-1} ((\sigma\tau)^{i+1}(v) - (\sigma\tau)^i(v)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\sigma\tau)^i(\sigma\tau(v) - v) \\ &= n(\sigma\tau(v) - v) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方で、 $G = \{T \in GL(V) \mid T(\Delta) = \Delta\}$ は $GL(V)$ の有限部分群であり、仮定より $\sigma\tau \in G$ だから、 $\sigma\tau$ の位数は有限である．そのためには、 $\sigma\tau(v) - v = 0$ でなければならない．よって、 $\sigma = \tau$ である． $\square$

命題 1.3 V を有限次元ベクトル空間とし、 $\langle -, - \rangle$ をその上の非退化対称双線型形式とする． V 上の鏡映 s がこの形式を不変にし、 $\alpha \in V \setminus \{0\}$ を $-\alpha$ に移すならば、 $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$s(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \quad (v \in V)$$

である. すなわち, $s = s_{\alpha, f}$ ($f \in V^*$) と表すとき,

$$f = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

である.

証明 v を s の鏡映面上の点とすると

$$\langle \alpha, v \rangle = \langle \alpha, s(v) \rangle = \langle s(\alpha), v \rangle = -\langle \alpha, v \rangle$$

より $\langle \alpha, v \rangle = 0$ であり, $\langle -, - \rangle$ に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間 $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ は $\dim V - 1$ 次元だから, s の鏡映面は $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ に等しい. α は s の鏡映面上にはないから, $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ である. $s_{\alpha, f}$ は, α を $-\alpha$ に移し $(\mathbb{K}\alpha)^\perp$ の点は動かさないから, s に一致する. $\square$

命題 1.4 V を有限次元ベクトル空間とする. 任意の $\alpha \in V$ と $f \in V^*$ に対して, $s_{\alpha, f}^* = s_{f, \alpha}$ である.

証明 任意の $g \in V^*$ と $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} s_{\alpha, f}^*(g)(v) &= g(s_{\alpha, f}(v)) \\ &= g(v - f(v)\alpha) \\ &= g(v) - f(v)g(\alpha) \\ &= (g - g(\alpha)f)(v) \\ &= s_{f, \alpha}(g)(v) \end{aligned}$$

だから, $s_{\alpha, f}^* = s_{f, \alpha}$ である. $\square$

1.2 ルート系

定義 1.5 (ルート系) 有限次元ベクトル空間 V 上の**ルート系** (root system) とは, 部分集合 $\Delta \subseteq V$ であって, 次の条件 (RS1)–(RS3) を満たすものをいう. さらに, 条件 (RS4) も満たすとき, そのルート系は**被約** (reduced) であるという^{*1}.

(RS1) Δ は有限であり, 0 を含まず, V を張る.

(RS2) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, V 上の鏡映 s_α であって, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ かつ $s_\alpha(\Delta) = \Delta$ を満たすものが存在する. ((RS1) と命題 1.2 より, このような s_α は一意に定まり, したがって, $s_\alpha = s_{\alpha, \alpha^\vee}$ となる $\alpha^\vee \in V^*$ も一意に定まる. 以下, この記号を用いる.)

(RS3) 任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して, $\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$ である.

(RS4) $\alpha \in \Delta$ ならば $2\alpha \notin \Delta$ である.

ベクトル空間 V の次元を, ルート系 Δ の**階数** (rank) という. ルート系の各元を, **ルート** (root) という.

(RS2) における $\alpha^\vee$ を α の**双対ルート** (coroot) といい, s_α を α に関する**ルート鏡映** (root reflection) という. ルート鏡映全体が生成する $GL(V)$ の部分群を, ルート系 Δ の**Weyl 群** (Weyl group) といい, $\mathbf{W}(\Delta)$ と書く.

^{*1} 定義 1.5 いう被約ルート系を, 単にルート系と呼ぶこともある.

本稿の以下の部分では、特に断らなくても、ルート α の双対ルートを $\alpha^\vee$ と書き、 α に関するルート鏡映を s_α と書く。考えているルート系を明示したいときは、双対ルートを $\alpha^\vee_\Delta$ 、ルート鏡映を s_α^Δ などとも書く。また、 $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して、

$$n(\beta, \alpha) = \alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$$

と書き、これを **Cartan 整数** (Cartan integer) という。この記号を用いれば、ルート β を α に関するルート鏡映で移した先は、

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$$

と書ける。

定義 1.6 (ルート系の同型) Δ_1 と Δ_2 を、それぞれ有限次元ベクトル空間 V_1 と V_2 上のルート系とする。ルート系 Δ_1 から Δ_2 への**同型** (isomorphism) とは、線型同型写像 $\Phi: V_1 \rightarrow V_2$ であって、 $\Phi(\Delta_1) = \Delta_2$ を満たすものをいう。ルート系 Δ_1 から Δ_2 への同型が存在するとき、これらのルート系は**同型** (isomorphic) であるという。

Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする。 $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の拡大体とすると、 Δ は V の係数拡大されたベクトル空間 $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ の部分集合ともみなせる。このようにみなすと、明らかに、 Δ は $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ 上のルート系となる。これを、ルート系の係数拡大という。

命題 1.7 Δ を ($\mathbb{K}$ 上の) 有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする。 V の部分有理ベクトル空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を

$$V_{\mathbb{Q}} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$$

と定めると、 Δ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系でもあり、包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \rightarrow V$ が誘導する ($\mathbb{K}$ 上の) 線型写像 $i: V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \rightarrow V$ は同型である (したがって、 V 上のルート系 Δ は、 $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系 Δ の $\mathbb{K}$ への係数拡大とみなせる)。

証明 $V_{\mathbb{Q}}$ と Δ が (RS1) と (RS4) を満たすことは明らかである。また、 $\alpha \in \Delta$ とすると、 V と Δ が (RS3) を満たすことより $\alpha^\vee(V_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}$ だから、 $\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \in (V_{\mathbb{Q}})^*$ であり、 $s_\alpha|_{V_{\mathbb{Q}}}$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の鏡映 $s_{\alpha, \alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}}$ である。この鏡映は、明らかに (RS2) と (RS3) の条件を満たす。よって、 Δ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上のルート系である。

包含写像 $V_{\mathbb{Q}} \rightarrow V$ が誘導する ($\mathbb{K}$ 上の) 線型写像 $i: V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \rightarrow V$ が同型であることを示す。まず、 $V = \text{span}_{\mathbb{K}} \Delta$ だから、 i は全射である。次に、 i が単射であることを示す。そのためには、 i の双対線型写像

$$i^*: V^* \rightarrow (V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K})^* \cong (V_{\mathbb{Q}})^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$$

が全射であることをいえばよい。各 $\alpha \in \Delta$ に対して

$$i^*(\alpha^\vee) = \alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \otimes 1$$

だから、 $(V_{\mathbb{Q}})^* = \text{span}_{\mathbb{Q}} \{\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} \mid \alpha \in \Delta\}$ をいえばよい。以下、これを示す。 $V_{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定すると (任意にとった $V_{\mathbb{Q}}$ 上の内積を $\mathbf{W}(\Delta)$ の作用に関して平均すればよい)、 $\alpha \in \Delta$ に対して命題 1.3 より $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}} = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

であり、これは $\langle -, - \rangle$ が定める有理線型同型 $V_{\mathbb{Q}} \cong (V_{\mathbb{Q}})^*$ を通して $2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle \in V_{\mathbb{Q}}$ に対応する。 $\alpha \in \Delta$ が動くときこれら全体は $V_{\mathbb{Q}}$ を張るから、 $\alpha^\vee|_{V_{\mathbb{Q}}}$ の全体は $(V_{\mathbb{Q}})^*$ を張る。これで、主張が示された。□

系 1.8 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする.

- (1) V 上の $\text{Aut}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ であって, 任意の $v \in V_{\mathbb{Q}} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$ に対して $\langle v, v \rangle \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるものが存在する.
- (2) $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式とすると, 任意のルート $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して, $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ

$$\alpha^{\vee} = \frac{2\langle -, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}, \quad n(\beta, \alpha) = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

が成り立つ.

証明 (1) $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ の部分体である場合, 任意に固定した V 上の内積を $\text{Aut}(\Delta)$ の作用に関して平均すれば, V 上の $\text{Aut}(\Delta)$ 不変な内積が得られる. $\mathbb{K}$ が一般の場合, $V_{\mathbb{Q}}$ 上の $\text{Aut}(\Delta)$ 不変な内積を一つとって係数拡大すれば, 条件を満たす V 上の非退化対称双線型形式が得られる.

(2) ルート鏡映 $s_{\alpha} = s_{\alpha, \alpha^{\vee}}$ は $\langle -, - \rangle$ を不変にし, α を $-\alpha$ に移すから, 命題 1.3 より $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ $\alpha^{\vee} = 2\langle -, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ である. また, これより, $n(\beta, \alpha) = \alpha^{\vee}(\beta) = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ である. $\square$

命題 1.7 より, 有限次元ベクトル空間 V 上のルート系 Δ は, $V_{\mathbb{Q}} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$ 上のルート系とみなせ, これはさらに, 係数拡大によって $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上のルート系ともみなせる. さらに, 系 1.8 (1) より, $V_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積が存在する. これらにより, ルート系の性質の証明の多くは, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり, $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積が定まっている場合に帰着される. この論法は, 本節の以下の部分でしばしば用いられる.

系 1.9 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする. $v \in V$ が任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $s_{\alpha}(v) = v$ を満たすならば, $v = 0$ である.

証明 系 1.8 (2) より, $\text{span}_{\mathbb{K}} \{\alpha^{\vee} \mid \alpha \in \Delta\} = V^*$ である. よって, 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $s_{\alpha}(v) = v$, すなわち $\alpha^{\vee}(v) = 0$ であるとする, $v = 0$ である. $\square$

Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし, $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を固定する. このとき, 系 1.8 より, 二つのルート $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して

$$n(\alpha, \beta) = 0 \iff n(\beta, \alpha) = 0 \iff \langle \alpha, \beta \rangle = 0$$

である. そこで, $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$ であるとき, α と β は**直交する** (orthogonal) という. また, ルートの集合 A と B について, A に属する任意のルートと B に属する任意のルートが直交するとき, A と B は直交するという.

1.3 部分ルート系

命題 1.10 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする. 部分ベクトル空間 $V' \subseteq V$ と部分集合 $\Delta' \subseteq \Delta$ が, $\Delta' = \Delta \cap V'$ かつ $\text{span}_{\mathbb{K}} \Delta' = V'$ を満たすとする.

- (1) Δ' は V' 上のルート系であり, Δ が被約ならば Δ' も被約である.
- (2) $\alpha \in \Delta'$ に対して, $s_{\alpha}^{\Delta'} = s_{\alpha}^{\Delta}|_{V'}$ である ($s_{\alpha}^{\Delta'}$ と $s_{\alpha}^{\Delta}|_{V'}$ は, それぞれルート系 Δ' と Δ における α に関するルート鏡映を表す).

- (3) $\alpha \in \Delta'$ に対して, $\alpha_{\Delta'}^\vee = \alpha_\Delta^\vee|_{V'}$ である ($\alpha_{\Delta'}^\vee$ と $\alpha_\Delta^\vee|_{V'}$ は, それぞれルート系 Δ' と Δ における α の双対ルートを表す).
- (4) V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ の V' への制限は, V' 上の $\mathbf{W}(\Delta')$ 不変な非退化対称双線型形式である.
- (5) 群準同型 $\iota: \mathbf{W}(\Delta') \rightarrow \mathbf{W}(\Delta)$ であって, 任意の $\alpha \in \Delta'$ に対して $\iota(s_\alpha^{\Delta'}) = s_\alpha^\Delta$ であるものが一意に存在する. さらに, この ι は単射である.

証明 (1), (2) Δ' が (RS1) を満たすことと, Δ が (RS4) を満たすならば Δ' もそうであることは明らかである. $\alpha \in \Delta'$ とすると, 任意の $v \in V'$ に対して $s_\alpha^\Delta(v) = v - \alpha_\Delta^\vee(v)\alpha \in V'$ だから, V' は s_α^Δ 安定である. したがって, 制限 $s_\alpha^\Delta|_{V'}$ は V' 上の鏡映となる. この鏡映は, 明らかに (RS2), (RS3) の条件を満たす. よって, Δ' は V' 上のルート系であり, (2) が成り立つ.

(3) (2) より $s_\alpha^{\Delta'} = s_\alpha^\Delta|_{V'} = s_{\alpha, \alpha_\Delta^\vee|_{V'}}|_{V'}$ だから, $\alpha_{\Delta'}^\vee = \alpha_\Delta^\vee|_{V'}$ である.

(4) V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ の V' への制限が $\mathbf{W}(\Delta')$ 不変であることは, (2) から明らかである. 次に, $v \in V'$ が任意の $w \in V'$ に対して $\langle v, w \rangle = 0$ を満たすとする. すると, 任意の $\alpha \in \Delta'$ に対して

$$s_\alpha^{\Delta'}(v) = s_\alpha^\Delta(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = v$$

だから (系 1.8), 系 1.9 より $v = 0$ である. よって, $\langle -, - \rangle$ は V' 上で非退化である.

(5) 条件を満たす ι の一意性は, $s_\alpha^{\Delta'}$ の全体が $\mathbf{W}(\Delta')$ を生成することから明らかである. 条件を満たす ι の存在を示す. V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する. (4) で示したように, $\langle -, - \rangle$ は V' 上で非退化だから, これに関する V' の直交空間 $V'^\perp$ は, V' の V における補空間である. したがって, 単射群準同型 $\iota: GL(V') \rightarrow GL(V)$ を, $\iota(T) = T \oplus \text{id}_{V'^\perp}$ と定義できる. この ι は, 明らかに, 各 $\alpha \in \Delta'$ に対して $s_\alpha^{\Delta'}$ を s_α^Δ に移し, したがって, $\mathbf{W}(\Delta')$ を $\mathbf{W}(\Delta)$ の中に移す. $\square$

定義 1.11 (部分ルート系) 命題 1.10 の状況で, Δ' を Δ の**部分ルート系** (root subsystem) という.

1.4 双対ルートの系

補題 1.12 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする. $\alpha \in \Delta$ と $t \in \text{Aut}(\Delta)$ に対して,

$$s_{t(\alpha)} = ts_\alpha t^{-1}, \quad t(\alpha)^\vee = t^{*-1}(\alpha^\vee)$$

である.

証明 $ts_\alpha t^{-1}$ は $t(\alpha)$ を $-t(\alpha)$ に移し Δ を安定にする鏡映だから, ルート鏡映の一意性より, $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$ である. また, 任意の $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} s_{t(\alpha)}(v) &= ts_\alpha t^{-1}(v) = t(t^{-1}(v) - \alpha^\vee(t^{-1}(v))\alpha) \\ &= v - \alpha^\vee(t^{-1}(v))t(\alpha) \\ &= v - t^{*-1}(\alpha^\vee)(v)t(\alpha) \\ &= s_{t(\alpha), t^{*-1}(\alpha^\vee)}(v) \end{aligned}$$

だから, $t(\alpha)^\vee = t^{*-1}(\alpha^\vee)$ である. $\square$

命題 1.13 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする.

- (1) $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ は V^* 上のルート系であり, Δ が被約であることと $\Delta^\vee$ が被約であることは同値である.
- (2) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^* = s_\alpha^{*-1}$ である.
- (3) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ である.
- (4) $GL(V)$ から $GL(V^*)$ への群同型 $t \mapsto t^{*-1}$ は, 自己同型群 $\text{Aut}(\Delta)$ から $\text{Aut}(\Delta^\vee)$ への群同型を与え, Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ から $\mathbf{W}(\Delta^\vee)$ への群同型を与える.

証明 (1), (2), (3) 系 1.8 (2) より, $\Delta^\vee$ は (RS1) を満たし, Δ が (RS4) を満たすことと $\Delta^\vee$ が (RS4) を満たすことは同値である. 各 $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ に対して, $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ だから

$$s_{\alpha^\vee} = s_{\alpha^\vee, \alpha}: V^* \rightarrow V^*, \quad f \mapsto f - f(\alpha)\alpha^\vee$$

は V^* 上の鏡映であり, $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^* = s_\alpha^{*-1}$ である (命題 1.4). $\beta^\vee \in \Delta^\vee$ に対して

$$s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = s_\alpha^{*-1}(\beta^\vee) = s_\alpha(\beta)^\vee \in \Delta^\vee$$

だから (最後の等号で補題 1.12 を用いた), $s_{\alpha^\vee}$ は (RS2) の条件を満たす. また, このとき $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ であり, 任意の $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Delta^\vee$ に対して $\alpha^{\vee\vee}(\beta^\vee) = \beta^\vee(\alpha) \in \mathbb{Z}$ だから, (RS3) も満たされる. よって, $\Delta^\vee$ は V^* 上のルート系であり, (2), (3) が成り立つ.

(4) 補題 1.12 より, $t \in \text{Aut}(\Delta)$ ならば $t^{*-1} \in \text{Aut}(\Delta^\vee)$ であり, (3) よりその逆も成り立つ. よって, 群同型 $t \mapsto t^{*-1}$ は, $\text{Aut}(\Delta)$ から $\text{Aut}(\Delta^\vee)$ への群同型を与える. また, (2) よりこの群同型は s_α を $s_{\alpha^\vee}$ に移すから, $\mathbf{W}(\Delta)$ から $\mathbf{W}(\Delta^\vee)$ への群同型も与える. $\square$

定義 1.14 (双対ルート系) 命題 1.13 の状況で, $\Delta^\vee$ を Δ の**双対ルート系** (dual root system) という.

1.5 ルート系の直和と既約分解

命題 1.15 $(V_i)_{i \in I}$ を有限次元ベクトル空間の有限族とし, 各 $i \in I$ に対して Δ_i を V_i 上のルート系とする. $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, $\Delta = \coprod_{i \in I} \Delta_i \subseteq V$ と置く.

- (1) Δ は V 上のルート系であり, Δ が被約であることとすべての Δ_i が被約であることは同値である.
- (2) $\alpha \in \Delta_i$ に対して, ルート鏡映 s_α^Δ は,

$$s_\alpha^\Delta(v) = \begin{cases} s_\alpha^{\Delta_i}(v) & (v \in V_i) \\ v & (v \in V_j, j \neq i) \end{cases}$$

で与えられる (s_α^Δ と $s_\alpha^{\Delta_i}$ は, それぞれルート系 Δ と Δ_i における α に関するルート鏡映を表す).

- (3) $\alpha \in \Delta_i$ に対して, 双対ルート $\alpha_\Delta^\vee$ は,

$$\alpha_\Delta^\vee(v) = \begin{cases} \alpha_{\Delta_i}^\vee(v) & (v \in V_i) \\ 0 & (v \in V_j, j \neq i) \end{cases}$$

で与えられる ($\alpha_\Delta^\vee$ と $\alpha_{\Delta_i}^\vee$ は, それぞれルート系 Δ という Δ_i における α の双対ルートを表す).

証明 明らかである. $\square$

定義 1.16 (ルート系の直和) 命題 1.15 の状況で, Δ を $(\Delta_i)_{i \in I}$ の **直和** (direct sum) という.

Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする. V が部分ベクトル空間の有限族 $(V_i)_{i \in I}$ に直和分解され, 各 V_i 上にルート系 Δ_i があって $\Delta = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ となっていれば, Δ はルート系の有限族 $(\Delta_i)_{i \in I}$ の直和と自然に同一視できる. このとき, Δ は $(\Delta_i)_{i \in I}$ に **直和分解** されるという.

命題 1.17 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし, $(\Delta_i)_{i \in I}$ を Δ の有限分割とする. このとき, 次の条件は同値である.

- (a) $(\Delta_i)_{i \in I}$ はルート系 Δ の直和分解である.
- (b) 各 $i \in I$ に対して $V_i = \text{span}_{\mathbb{K}} \Delta_i$ と置くと, $\sum_{i \in I} V_i$ は直和である.
- (c) 任意の異なる二つの元 $i, j \in I$ に対して, Δ_i と Δ_j は直交する.

証明 (a) $\implies$ (b) 明らかである.

(b) $\implies$ (a) $\sum_{i \in I} V_i$ が直和ならば, 各 $i \in I$ に対して $\Delta_i = \Delta \cap V_i$ だから Δ_i は V_i 上のルート系であり (命題 1.10), したがって $(\Delta_i)_{i \in I}$ はルート系 Δ の直和分解である.

(a) $\implies$ (c) ルート系の直和におけるルート鏡映の式から従う.

(c) $\implies$ (b) 一般性を失わず, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり, V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する (命題 1.7, 系 1.8). このとき, (c) が成り立つとすると, どの異なる二つの Δ_i も内積に関して直交するから, $(V_i)_{i \in I}$ は内積空間 V における直交族であり, したがって, $\sum_{i \in I} V_i$ は直和である. $\square$

定義 1.18 (既約ルート系) Δ を空でないルート系とする. Δ が「一つが Δ でその他がすべて $\emptyset$ 」という形の直和分解しかもたないとき, ルート系 Δ は **既約** (irreducible) であるという. そうでないとき, ルート系 Δ は **可約** (reducible) であるという.

ルート系の既約ルート系への直和分解を **既約分解** (irreducible decomposition) といい, 既約分解に現れる既約ルート系のそれぞれを **既約成分** (irreducible component) という.

命題 1.19 任意のルート系は, 順序を除いて一意に既約分解される.

証明 Δ をルート系とする. Δ が可約である限り Δ は二つの空でないルート系 Δ' と Δ'' の直和に分解でき, Δ', Δ'' に対しても同じことがいえる. Δ は有限集合だから, この操作は有限回で終了する. よって, Δ の既約分解は存在する.

$(\Delta_i)_{i \in I}$ と $(\Delta'_j)_{j \in J}$ がともに Δ の既約分解であるとする. 各 $i \in I$ と $j \in J$ に対して, $\{\Delta_i \cap \Delta'_j, \Delta_i \setminus \Delta'_j\}$ は Δ_i の直和分解だから, Δ_i の既約性より $\Delta_i \cap \Delta'_j = \Delta_i$ または $\Delta_i \setminus \Delta'_j = \Delta_i$, すなわち $\Delta_i \supseteq \Delta'_j$ または $\Delta_i \cap \Delta'_j = \emptyset$ である. Δ_i と Δ'_j を逆にしても同じことがいえるから, 結局 $\Delta_i = \Delta'_j$ または $\Delta_i \cap \Delta'_j = \emptyset$ である. これが任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して成り立つから, $(\Delta_i)_{i \in I}$ と $(\Delta'_j)_{j \in J}$ は順序を除いて一致する. よって, Δ の既約分解は順序を除いて一意である. $\square$

命題 1.20 有限次元ベクトル空間 V 上のルート系 Δ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) Δ は既約である.
- (b) Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ の V 上の自然表現は既約である.

証明 Δ が空 (したがって, $V = 0$) ならば, どちらの条件も成り立たない. 以下, Δ が空でない (したがっ

て、 $V \neq 0$ である) 場合を考える。

(a) $\implies$ (b) 0 と V 以外の $\mathbf{W}(\Delta)$ 安定な部分ベクトル空間 V_1 がとれたとする。 $\beta \in \Delta \setminus V_1$ とすると、 V_1 は s_β 安定だから、任意の $v \in V_1$ に対して $s_\beta(v) = v - \beta^\vee(v)\beta$ は V_1 に属する。ところが、 $v \in V_1$ かつ $\alpha \notin V$ だから、そのためには $\beta^\vee(v) = 0$ でなければならない。したがって、 $\beta^\vee$ は V_1 上で 0 となる。特に、任意の $\alpha \in \Delta \cap V_1$ に対して $n(\alpha, \beta) = \beta^\vee(\alpha) = 0$ である。よって、 $\Delta \cap V_1$ と $\Delta \setminus V_1$ は直交する。

$V_1 \neq V$ かつ $\text{span}_{\mathbb{K}} \Delta = V$ だから、 Δ は V_1 に含まれない。すなわち、 $\Delta \setminus V_1$ は空でない。また、 $\Delta \cap V_1$ が空であるとする、前段の議論よりすべての $\alpha^\vee$ ($\alpha \in \Delta$) が V_1 上で 0 であることになるが、これは $V_1 \neq 0$ に反する (系 1.8 (2))。よって、 $\Delta \cap V_1$ は空でない。以上より、 Δ は可約である。対偶をとれば、主張が従う。

(b) $\implies$ (a) Δ が V_1 上の空でないルート系 Δ_1 と V_2 上の空でないルート系 Δ_2 に直和分解されるとすると、命題 1.15 より、 V_1 と V_2 は $\mathbf{W}(\Delta)$ 安定である。対偶をとれば、主張が従う。 $\square$

系 1.21 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上の既約ルート系とする。 V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な双線型形式は、スカラー倍を除いて一意である。

証明 V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な双線型形式は、 $\mathbf{W}(\Delta)$ の自然表現からその反傾表現への同変作用素と同一視できる。よって、主張は、命題 1.20 と Schur の補題から従う。 $\square$

注意 1.22 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし、 $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式とする。 $\alpha, \beta \in \Delta$ を同じ既約成分に属する二つのルートとすると、 $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる (命題 1.20)。このとき、

$$\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle s(\alpha), s(\alpha) \rangle} = \frac{n(\beta, s(\alpha))}{n(\alpha, s(\beta))} \in \mathbb{Q}_{>0}$$

であり、この値は $\langle -, - \rangle$ のとり方によらない。そこで、用語の濫用で、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも、 $\sqrt{\langle \beta, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle}$ を β の α に対する長さの比という。

$\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を、任意の $v \in V_{\mathbb{Q}} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$ に対して $\langle v, v \rangle \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるようにとれば (系 1.8 (1))、 $\langle -, - \rangle$ は $V_{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積を定め、これはさらに、係数拡大によって $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積を定める。これにより、ルートの長さの比に関する議論は、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合に帰着できる。

1.6 二つのルートの関係

定理 1.23 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする。二つのルート $\alpha, \beta \in V$ に対して、 $n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組は、表 1 の (i)–(xi') (Δ が被約ならば、(i)–(ix)) のいずれかである。さらに、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり、 V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっているならば、それぞれの場合の $\|\beta\|/\|\alpha\|$ および $\angle(\alpha, \beta)$ の値は、同表の対応する列のとおりである。

証明 一般性を失わず、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり、 V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する (命題 1.7, 系 1.8)。

$n(\alpha, \beta) = 2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \beta, \beta \rangle$ かつ $n(\beta, \alpha) = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ だから (系 1.8 (2))、

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = \frac{4\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 4(\cos \angle(\alpha, \beta))^2 \leq 4$$

表 1 二つのルートの関係

	$n(\alpha, \beta)$	$n(\beta, \alpha)$	$\ \beta\ /\ \alpha\ $	$\angle(\alpha, \beta)$
(i)	0	0	不定	90°
(ii)	1	1	1	60°
(iii)	-1	-1	1	120°
(iv)	1	2	$\sqrt{2}$	45°
(iv')	2	1	$1/\sqrt{2}$	45°
(v)	-1	-2	$\sqrt{2}$	135°
(v')	-2	-1	$1/\sqrt{2}$	135°
(vi)	1	3	$\sqrt{3}$	30°
(vi')	3	1	$1/\sqrt{3}$	30°
(vii)	-1	-3	$\sqrt{3}$	150°
(vii')	-3	-1	$1/\sqrt{3}$	150°
(viii)	2	2	1	0°
(ix)	-2	-2	1	180°
(x)	1	4	2	0°
(x')	4	1	$1/2$	0°
(xi)	-1	-4	2	180°
(xi')	-4	-1	$1/2$	180°

である。また、 $n(\alpha, \beta) = 0$ と $n(\beta, \alpha) = 0$ とは同値であり、 $n(\alpha, \beta), n(\beta, \alpha) \neq 0$ ならば

$$\frac{n(\beta, \alpha)}{n(\alpha, \beta)} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$$

である。よって、 $n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組としてありうるものは、表に挙げたもので尽くされる。

(x)–(xi') の場合、 β は $\pm 2\alpha$ または $\pm \alpha/2$ となり被約性の条件 (RS4) に反するから、 Δ が被約ならば、ありうるものは (i)–(ix) に限られる。□

注意 1.24 Δ をルート系とし、 $\alpha, \beta \in \Delta$ とする。

- (1) 表 1 の (i) 以外の場合には、 β の α に対する長さの比 (注意 1.22) は、同表に示した「 $\|\beta\|/\|\alpha\|$ 」の値に等しい。
- (2) 用語の濫用で、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とは限らない場合にも、**二つのルート $\alpha, \beta \in \Delta$ のなす角度 $\angle(\alpha, \beta)$ を、 $n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組から表 1 によって定義する**。特に、 α と β が**鋭角をなす**、**直交する**、**鈍角をなす**とは、それぞれ $n(\beta, \alpha) > 0$ 、 $n(\beta, \alpha) = 0$ 、 $n(\beta, \alpha) < 0$ であることをいう（「直交」については、1.2 節の最後に述べた定義と一致する）。

系 1.25 ルート系 Δ の二つのルート α と β が線型従属ならば、 β は $\pm \alpha/2$ 、 $\pm \alpha$ 、 $\pm 2\alpha$ のいずれかである。さらに、 Δ が被約ならば、 β は $\pm \alpha$ のいずれかである。

証明 定理 1.23 から従う。□

系 1.26 Δ をルート系とし, $\alpha, \beta \in \Delta$ とする.

- (1) α と β が鋭角をなすならば, $\beta - \alpha \in \Delta \cup \{0\}$ である.
- (2) α と β が鈍角をなすならば, $\beta + \alpha \in \Delta \cup \{0\}$ である.

証明 定理 1.23 から従う. □

証明 (1) α と β が鋭角をなし (すなわち, $n(\beta, \alpha) > 0$ であり) $\alpha \neq \beta$ ならば, 定理 1.23 より $n(\beta, \alpha) = 1$ または $n(\alpha, \beta) = 1$ である. 前者の場合 $\beta - \alpha = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha = s_\alpha(\beta) \in \Delta$ であり, 後者の場合 $\alpha - \beta = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta = s_\beta(\alpha) \in \Delta$ だから, いずれにしても $\beta - \alpha \in \Delta$ となる.

- (2) $-\alpha$ と β に (1) を適用すればよい. □

系 1.27 ルート系 Δ の同じ既約成分に属する二つのルート $\alpha, \beta \in \Delta$ について, β の α に対する長さの比は, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ (Δ が被約ならば, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$) またはこれらの逆数のいずれかである.

証明 α と β は同じ既約成分に属するから, $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる (命題 1.20). よって, 定理 1.23 と注意 1.24 (1) より, β の α に対する長さの比は, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ (Δ が被約ならば $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$) またはこれらの逆数のいずれかである. □

系 1.28 Δ をルート系とする. 同じ既約成分に属する二つのルート $\alpha, \beta \in \Delta$ の長さが等しければ, これらは Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ の作用によって移り合う.

証明 α と β は同じ既約成分に属するから, $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(\alpha)$ と β が直交しないようにとれる (命題 1.20). 必要ならば s を ss_α に置き換えることで, $s(\alpha)$ と β は鋭角をなすとしてよい. α と β の (したがって, $s(\alpha)$ と β の) 長さが等しいことより, $\angle(s(\alpha), \beta)$ は 0° または 60° である (定理 1.23, 注意 1.24). 前者の場合, $s(\alpha) = \beta$ である. 後者の場合, $\gamma = s(\alpha) - \beta \in \Delta$ であり (系 1.26 (1)), $s_\gamma s(\alpha) = \beta$ となる. いずれにしても, 主張が成り立つ. □

命題 1.29 Δ をルート系, $\alpha, \beta \in \Delta$ を線型独立な二つのルートとし,

$$I_{\beta, \alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta\}$$

と置く.

- (1) $I_{\beta, \alpha}$ は, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける.
- (2) (1) の p, q について, $p - q = -n(\beta, \alpha)$ が成り立つ.
- (3) (1) の p, q について, $\gamma = \beta - q\alpha$ と置くと, $p + q = -n(\gamma, \alpha)$ が成り立ち, これは $0, 1, 2, 3$ のいずれかである.

証明 (1) $p = \max I_{\beta, \alpha}$, $-q = \min I_{\beta, \alpha}$ と置く. 明らかに $0 \in I_{\beta, \alpha}$ だから, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である. もし $I_{\beta, \alpha} \neq [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ であるとする, $r, s \in I_{\beta, \alpha}$ を $r < s$ かつ $r + 1, s - 1 \notin I_{\beta, \alpha}$ を満たすようにとれる. この r, s について, 系 1.26 の対偶より

$$n(\beta + r\alpha, \alpha) \geq 0 \geq n(\beta + s\alpha, \alpha)$$

だが, 一方で $n(\beta + j\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + jn(\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + 2j$ は j に関して狭義単調増加だから, これは不可能である. よって, 背理法より, $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ である.

表 2 p と q の値の組

	$n(\alpha, \beta)$	$n(\beta, \alpha)$	(p, q)
(i)	0	0	(0, 0), (1, 1)
(ii)	1	1	(0, 1), (1, 2)
(iii)	-1	-1	(1, 0), (2, 1)
(iv)	1	2	(0, 2)
(iv')	2	1	(0, 1)
(v)	-1	-2	(2, 0)
(v')	-2	-1	(1, 0)
(vi)	1	3	(0, 3)
(vi')	3	1	(0, 1)
(vii)	-1	-3	(3, 0)
(vii')	-3	-1	(1, 0)

(2) ルート鏡映 s_α は $\beta + j\alpha$ を $\beta - (n(\beta, \alpha) + j)\alpha$ に移すから、写像 $j \mapsto -(n(\beta, \alpha) + j)$ は $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ から自身への全単射である。よって、 $p - q = -n(\beta, \alpha)$ である。

(3) β の代わりに γ に対して (2) を適用すれば、 $p + q = -n(\gamma, \alpha)$ を得る。 p と q は 0 以上の整数である。一方で、 α と γ が線型独立であることと定理 1.23 より、 $|n(\gamma, \alpha)|$ は 0, 1, 2, 3 のいずれかである。よって、 $p + q = -n(\gamma, \alpha)$ は、0, 1, 2, 3 のいずれかである。□

定理 1.30 Δ をルート系とする。 $\alpha, \beta \in \Delta$ を線型独立な二つのルートとして、 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を命題 1.29 のとおりに定める。 $n(\alpha, \beta)$ と $n(\beta, \alpha)$ の値の組が表 1 の (i)–(vii') のそれぞれである場合 (α と β が線型独立であることと定理 1.23 より、これらのいずれかが成り立つ)、 p と q の値の組は、表 2 に挙げたもののいずれかである。

証明 命題 1.29 より $p - q = -n(\beta, \alpha)$ かつ $p + q \in \{0, 1, 2, 3\}$ だから、それぞれの場合に p と q の値の組としてありうるものは、表に挙げたもののほかには、(iv') または (vi') の場合の (1, 2) と (v') または (vii') の場合の (2, 1) に限られる。(iv') または (vi') の場合、 α と β を入れ替えて (iv) または (vi) の場合の結果を適用すれば、 $\alpha + \beta \notin \Delta$ 、すなわち $p = 0$ を得る。したがって、 $(p, q) = (1, 2)$ ではありえず、 $(p, q) = (0, 1)$ となる。同様に、(v') または (vii') の場合、 α と β を入れ替えて (v) または (vii) の場合の結果を適用すれば、 $\alpha - \beta \notin \Delta$ 、すなわち $q = 0$ を得る。したがって、 $(p, q) = (2, 1)$ ではありえず、 $(p, q) = (1, 0)$ となる。以上より、 (p, q) としてありうるものは、表に挙げたもので尽くされる。□

系 1.31 Δ をルート系とする。線型独立な二つのルート $\alpha, \beta \in \Delta$ が $\alpha + \beta \in \Delta$ を満たすとして、 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を命題 1.29 のとおりに定める。このとき、 $\alpha + \beta$ の β に対する長さの比 ($\alpha, \beta, \alpha + \beta$ の中で直交する対はただか一つだから、 β と $\alpha + \beta$ は Δ の同じ既約成分に属し、長さの比が定まる) は、 $\sqrt{(q+1)/p}$ に等しい。

証明 $\alpha + \beta \in \Delta$ より $p \geq 1$ だから、表 2 に示した p と q の値の組の中でありうるのは、(i) の場合の $(p, q) = (1, 1)$ 、(ii) の場合の $(p, q) = (1, 2)$ 、(iii) の場合の $(p, q) = (1, 0), (2, 1)$ 、(v) の場合の $(p, q) = (2, 0)$ 、(v') の場合の $(p, q) = (1, 0)$ 、(vii) の場合の $(p, q) = (3, 0)$ 、(vii') の場合の $(p, q) = (1, 0)$ に限られる。これ

らのそれぞれの場合に、 $\alpha + \beta$ の β に対する長さの比が $\sqrt{(q+1)/p}$ に等しいことが確かめられる。 $\square$

1.7 被約ルート系への帰着

定義 1.32 (割れないルート) Δ をルート系とする。ルート $\alpha \in \Delta$ が**割れない** (indivisible) とは、 $\alpha/2 \notin \Delta$ であることをいう。

命題 1.33 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする。 Δ' を、 Δ の割れないルート全体のなす集合とする。

- (1) Δ' は V 上の被約ルート系であり、 Δ が既約であることと Δ' が既約であることは同値である。
- (2) $\alpha \in \Delta'$ に対して、 $s_{\alpha}^{\Delta'} = s_{\alpha}^{\Delta}$ である ($s_{\alpha}^{\Delta'}$ と s_{α}^{Δ} は、それぞれルート系 Δ' と Δ における α に関するルート鏡映を表す)。
- (3) $\alpha \in \Delta'$ に対して、 $\alpha_{\Delta'}^{\vee} = \alpha_{\Delta}^{\vee}$ である ($\alpha_{\Delta'}^{\vee}$ と $\alpha_{\Delta}^{\vee}$ は、それぞれルート系 Δ' と Δ における α の双対ルートを表す)。
- (4) $\mathbf{W}(\Delta') = \mathbf{W}(\Delta)$ である。

証明 (1), (2) Δ' が (RS1), (RS4) を満たすことは明らかである。 $\alpha \in \Delta'$ とすると、 s_{α}^{Δ} は Δ の自己同型だから、割れないルートを割れないルートに移す。したがって、鏡映 s_{α}^{Δ} は、(RS2), (RS3) の条件を満たす。よって、 Δ' は V 上の被約ルート系であり、(3) が成り立つ。

$V = V_1 \oplus V_2$ をベクトル空間の直和分解とすると、 $\Delta = (\Delta \cap V_1) \sqcup (\Delta \cap V_2)$ であることと $\Delta' = (\Delta' \cap V_1) \sqcup (\Delta' \cap V_2)$ であることは同値であり、また、 $i \in \{1, 2\}$ に対して、 $\Delta \cap V_i$ が空であることと $\Delta' \cap V_i$ が空であることは同値である。よって、 Δ が既約であることと Δ' が既約であることは同値である。

(3), (4) (2) から明らかである。 $\square$

注意 1.34 命題 1.33 において、 $\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha/2 \notin \Delta\}$ の代わりに $\Delta'' = \{\alpha \in \Delta \mid 2\alpha \notin \Delta\}$ を用いても、同じ主張が成り立つ。証明も、同様にできる。

注意 1.35 命題 1.33 や注意 1.34 において、 $\text{Aut}(\Delta') = \text{Aut}(\Delta)$ や $\text{Aut}(\Delta'') = \text{Aut}(\Delta)$ は成り立たない。たとえば、 $\mathbb{K}^2$ の標準基底を (ϵ_1, ϵ_2) と書くと、 $\Delta = \{\pm\epsilon_1, \pm 2\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ は $\mathbb{K}^2$ 上の (被約でない) ルート系であり、 Δ の自己同型は恒等写像のみだが、 $\Delta' = \{\pm\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ や $\Delta'' = \{\pm 2\epsilon_1, \pm\epsilon_2\}$ は恒等写像以外の自己同型をもつ。

次の定理により、被約でない既約ルート系の構成と分類は、被約なルート系の構成と分類に帰着される (4.4 節)。

定理 1.36 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上の被約でない既約ルート系とする。

- (1) Δ の各ルートの最短ルートに対する長さの比は、 $1, \sqrt{2}, 2$ のいずれかである。

以下、最短ルートに対する長さの比が $1, \sqrt{2}, 2$ であるルート全体のなす集合を、それぞれ A, B, C と書く。

- (2) $2A = C$ である。
- (3) A に属する異なる二つのルートは、直交する。

(4) $\Delta' = A \cup B$ と $\Delta'' = B \cup C$ は、 V 上の被約な既約ルート系である。

証明 (1) Δ の二つのルートの長さの比は、 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ またはこれらの逆数のいずれかである (系 1.27). 一方で、 Δ は被約でないから、長さの比が $1:2$ であるような二つのルートが存在する。よって、主張が成り立つ。

(2) Δ は被約でないから、 $\alpha, 2\alpha \in \Delta$ を満たすルート α がとれ、 $\alpha \in A$ かつ $2\alpha \in C$ となる。 $\beta \in A$ とすると、 $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(\alpha) = \beta$ となるようにとれるから (系 1.28), $2\beta = s(2\alpha) \in C$ である。逆に、 $\gamma \in C$ とすると、 $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $s(2\alpha) = \gamma$ となるようにとれるから (系 1.28), $\gamma/2 = s(\alpha) \in A$ である。よって、 $2A = C$ である。

(3) $\alpha, \beta \in A$ を異なる二つのルートとすると、(2) より $2\alpha \in C$ である。 2α と β の長さの比は $2:1$ だから、定理 1.23 より、これらは直交する。よって、 α と β は直交する。

(4) (2) より、 $A \cup B = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha/2 \notin \Delta\}$, $B \cup C = \{\alpha \in \Delta \mid 2\alpha \notin \Delta\}$ である。よって、主張は、命題 1.33 と注意 1.34 から従う。 $\square$

2 ルート系の基底

2.1 基底

定義 2.1 (基底) Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする。 $\Pi \subseteq \Delta$ がルート系 Δ の**基底** (basis) であるとは、次の条件を満たすことをいう。

- (i) Π はベクトル空間 V の基底である。
- (ii) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して、 α を Π の元の線型結合として書くときの係数は、「すべて 0 以上の整数である」か「すべて 0 以下の整数である」かのいずれかである。

Δ の基底 Π を固定するとき、 Π の元を、**単純ルート** (simple root) という。 ルートのうち、 Π の元の線型結合として書くときの係数がすべて 0 以上の整数であるものを Π に関する**正ルート** (positive root) といい、すべて 0 以下の整数であるものを Π に関する**負ルート** (negative root) という。 Π に関する正ルート、負ルートの全体を、それぞれ $\Delta_+(\Pi)$, $\Delta_-(\Pi)$ と書く。

定義から明らかに、ルート系の基底は、割れないルートのみからなる。

Δ をルート系とすると、 Δ の自己同型は、基底を基底に移す。これにより、自己同型群 $\text{Aut}(\Delta)$ は (したがって Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ も)、 Δ の基底全体のなす集合に作用する。

命題 2.2 Δ をルート系とし、 Π をその基底とする。異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ は、直角または鈍角をなす。

証明 基底の定義より $\beta - \alpha \notin \Delta \cup \{0\}$ だから、主張は系 1.26 (1) の対偶から従う。 $\square$

本小節の以下の部分では、 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とするとき、 $\alpha \in \Delta$ に関するルート鏡映の鏡映面を Σ_α と書く。すなわち、

$$\Sigma_\alpha = \text{Ker } \alpha^\vee = \{v \in V \mid \alpha^\vee(v) = 0\}$$

である。 $\langle -, - \rangle$ を V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式とすると、 $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ かつ $\alpha^\vee = 2\langle -, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$

だから (系 1.8), Σ_α はこの非退化対称双線型形式に関する $\mathbb{K}\alpha$ の直交空間となる.

定義 2.3 (Weyl チャンバー) Δ を有限次元実ベクトル空間 V 上のルート系とする. V の開集合 $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_\alpha$ の各連結成分を, Δ の **Weyl チャンバー** (Weyl chamber) という.

Δ を有限次元実ベクトル空間上のルート系とすると, Δ の自己同型は, Weyl チャンバーを Δ を有限次元実ベクトル空間上のルート系とすると, Δ の自己同型は, Weyl チャンバーを $\mathbf{W}(\Delta)$ も, Δ の Weyl チャンバー全体のなす集合に作用する.

補題 2.4 実内積空間 V の元の族 $(v_i)_{i \in I}$ が, 次の条件を満たすとする.

- (i) ある $w \in V \setminus \{0\}$ が存在して, 任意の $i \in I$ に対して $\langle v_i, w \rangle > 0$ となる.
- (ii) 任意の異なる二つの元 $i, j \in I$ に対して, $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$ である.

このとき, $(v_i)_{i \in I}$ は線型独立である.

証明 $I', I'' \subseteq I$ を互いに交わらない有限部分集合とし, 各 $i \in I'$ に対して $a_i \geq 0$, 各 $j \in I''$ に対して $b_j \geq 0$ を任意にとる. もし $\sum_{i \in I'} a_i v_i = \sum_{j \in I''} b_j v_j$ ならば, これを v と置くと, 条件 (ii) より

$$\|v\|^2 = \left\langle \sum_{i \in I'} a_i v_i, \sum_{j \in I''} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i \in I', j \in I''} a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle \leq 0$$

だから,

$$\sum_{i \in I'} a_i v_i = \sum_{j \in I''} b_j v_j = v = 0$$

である. 条件 (i) の $w \in V \setminus \{0\}$ と上式の各辺との内積をとれば, $a_i = 0$ および $b_j = 0$ を得る. よって, $(v_i)_{i \in I}$ は線型独立である. $\square$

定理 2.5 Δ を有限次元実ベクトル空間 V 上のルート系とする.

- (1) Δ の基底 Π に対して,

$$C(\Pi) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(v) > 0\}$$

は Δ の Weyl チャンバーである.

- (2) Δ の Weyl チャンバー C に対して,

$$\begin{aligned} \Delta_+(C) &= \{\alpha \in \Delta \mid \alpha^\vee(C) \subseteq \mathbb{R}_{>0}\}, \\ \Pi(C) &= \{\alpha \in \Delta_+(C) \mid \alpha \text{ は } \Delta_+(C) \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\} \end{aligned}$$

と定めると, $\Pi(C)$ は Δ の基底である.

- (3) (1) と (2) の対応は互いに他の逆であり, Δ の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える. さらに, この対応は, 自己同型群 $\text{Aut}(\Delta)$ の作用を保つ.

証明 V 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する (系 1.8). $\alpha \in \Delta$ と $v \in V$ に対して, $\alpha^\vee(v) = 2\langle v, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ だから, $\alpha^\vee(v)$ と $\langle v, \alpha \rangle$ は同符号である.

- (1) 内積を用いると,

$$C(\Pi) = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \langle v, \alpha \rangle > 0\}$$

と書ける. Π は V の基底だから, $C(\Pi)$ は連結である. $C(\Pi)$ の元と Π に関する正ルートとの内積は正であり, Π に関する負ルートとの内積は負だから, $C(\Pi)$ は

$$V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_{\alpha} = \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \langle v, \alpha \rangle \neq 0\}$$

に含まれる. さらに, $v' \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_{\alpha}$ が $C(\Pi)$ と同じ連結成分に含まれるならば, 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\langle v', \alpha \rangle$ と $\langle v, \alpha \rangle$ ($v \in C(\Pi)$) は同符号だから, $v' \in C(\Pi)$ である. よって, $C(\Pi)$ は $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_{\alpha}$ の一つの連結成分, すなわち Weyl チャンバーである.

(2) $\alpha^{\vee}$ の符号は各 Weyl チャンバー上で一定だから, $v_0 \in C$ を一つ固定すると

$$\Delta_+(C) = \{\alpha \in \Delta \mid \langle v_0, \alpha \rangle > 0\} \quad (*)$$

と書ける. $\alpha \in \Delta_+(C)$ とすると, それが $\Pi(C)$ に属していない限り $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ ($k \geq 2$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta_+(C)$) と分解でき, 各 α_i に対しても同じことがいえる. 各 i に対して $\langle v_0, \alpha_i \rangle < \langle v_0, \alpha \rangle$ だから, この操作は有限回で終了する. よって, $\Delta_+(C)$ に属するルートは, $\Pi(C)$ の元の 0 以上の整数を係数とする線型結合で書ける. $\Delta = \Delta_+(C) \cup (-\Delta_+(C))$ だから, 残りのルートは, $\Pi(C)$ の元の 0 以下の整数を係数とする線型結合で書ける.

前段の結果から, $\Pi(C)$ が V を張ることもわかる. あとは, $\Pi(C)$ が線型独立であることを示せばよい. そのためには, $\Pi(C)$ が補題 2.4 の条件を満たすことをいえばよい. 条件 (i) は, (*) より満たされる. 条件 (ii) が満たされないとすると, ある $\alpha, \beta \in \Pi(C)$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ となるが, このとき系 1.26 より $\beta - \alpha \in \Delta$ である. したがって, $\beta - \alpha$ または $\alpha - \beta$ が $\Delta_+(C)$ に属することになるが, いずれにしても $\alpha, \beta \in \Pi(C)$ に矛盾する. よって, 背理法より, 条件 (ii) は満たされる.

(3) Π を Δ の基底とすると, 容易にわかるように $\Delta_+(\Pi) \subseteq \Delta_+(C(\Pi))$ だが, $\Delta_+(\Pi)$ と $\Delta_-(\Pi) = -\Delta_+(\Pi)$, $\Delta_+(C(\Pi))$ と $-\Delta_+(C(\Pi))$ はともに Δ の分割を与えるから, $\Delta_+(\Pi) = \Delta_+(C(\Pi))$ である. したがって, $\Pi(C(\Pi))$ は $\Delta_+(\Pi)$ の元のうち $\Delta_+(\Pi)$ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けないもの全体だが, 正ルートの定義よりこれは Π に等しい. また, C を Δ の Weyl チャンバーとすると, 容易にわかるように $C \subseteq C(\Pi(C))$ であり, C と $C(\Pi(C))$ はともに $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_{\alpha}$ の連結成分だから $C = C(\Pi(C))$ である. よって, (1) と (2) の対応は互いに他の逆であり, Δ の基底と Weyl チャンバーとの間の一対一対応を与える.

$t \in \text{Aut}(\Delta)$ とすると, Δ の基底 Π に対して,

$$\begin{aligned} C(t(\Pi)) &= \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } t(\alpha)^{\vee}(v) > 0\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^{\vee}(t^{-1}(v)) > 0\} \\ &= t(C(\Pi)) \end{aligned}$$

である (補題 1.12). よって, 上記の対応は, 自己同型群 $\text{Aut}(\Delta)$ の作用を保つ. □

系 2.6 任意のルート系は, 基底をもつ.

証明 一般性を失わず, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ と仮定する (命題 1.7). このとき基底の存在は, 定理 2.5 から従う. □

Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし, Π をその基底 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし, Π をその基底 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし, Π をその基底 Π を基底とする格子 $\text{span}_{\mathbb{Z}} \Pi$ に等しい. これを, ルート系 Δ の **ルート格子** (root lattice) という.

2.2 基底と Weyl 群

補題 2.7 Δ をルート系とし, Π をその基底とする. 単純ルート $\alpha \in \Pi$ に関する鏡映 s_α は, $\Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こす.

証明 $\beta \in \Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ とする. $s_\alpha(\beta) \notin \mathbb{K}\alpha$ は明らかである. $\beta = \sum_{\gamma \in \Pi} a_\gamma \gamma$ (各 a_γ は 0 以上の整数) と表すと, ある $\gamma \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ が存在して $a_\gamma > 0$ となる. ここで,

$$s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in \Pi} a_\gamma (\gamma - n(\gamma, \alpha)\alpha) = \sum_{\gamma \in \Pi} a_\gamma \gamma - \left(\sum_{\gamma \in \Pi} n(\gamma, \alpha) \right) \alpha$$

だから, $s_\alpha(\gamma)$ を Π の元の線型結合で表すときの γ の係数も $a_\gamma > 0$ である. これより, $s_\alpha(\beta) \in \Delta_+(\Pi)$ である. よって, s_α は, $\Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こす. $\square$

系 2.8 Δ をルート系とし, Π をその基底とする. Π に関する割れない正ルート全体の和の $1/2$ 倍を ρ と置くと, 任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して, $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ である.

証明 Π に関する割れない正ルート全体のなす集合を, $\Delta_+(\Pi)'$ と置く. s_α は, $\Delta_+(\Pi) \setminus \mathbb{K}\alpha$ 上の置換を引き起こし (補題 2.7), 割れないルートを割れないルートに移すから, $\Delta_+(\Pi)' \setminus \{\alpha\}$ 上の置換を引き起こす. よって,

$$s_\alpha(\rho) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta \in \Delta_+(\Pi)' \setminus \{\alpha\}} s_\alpha(\beta) + s_\alpha(\alpha) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta \in \Delta_+(\Pi)' \setminus \{\alpha\}} \beta - \alpha \right) = \rho - \alpha$$

である. $\square$

補題 2.9 Δ をルート系とし, Π をその基底とする. $s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$ ($k \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Pi$) とし, s は k 個未満の $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ の元の合成としては書けないとする. このとき, $s(\alpha_k)$ は Π に関する負ルートである.

証明 $s(\alpha_k) = -s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ が正ルートであると仮定すると, $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は負ルートだから, $1 \leq i \leq k-1$ を適当にとり, $\beta = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は負ルートだが $s_{\alpha_i}(\beta) = s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)$ は正ルートであるようにできる. 一方で, s_{α_i} は $\mathbb{K}\alpha_i$ に属さない正ルートを正ルートに移す (補題 2.7). したがって, $\beta \in \mathbb{K}\alpha_i$ でなければならないから,

$$s_{\alpha_i} = s_\beta = s_{s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}} s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}} \cdots s_{\alpha_{i+1}}$$

となり (補題 1.12), 移項すれば

$$s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_k} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$$

を得る. これより $s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k} = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$ となるが, これは k の最小性に矛盾する. よって, 背理法より, $s(\alpha_k)$ は負ルートである. $\square$

定理 2.10 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする.

- (1) Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ は, Δ の基底全体のなす集合に自由かつ推移的に作用する.
- (2) Π を Δ の基底とすると, $\mathbf{W}(\Delta)\Pi$ は Δ の割れないルート全体に等しい.

(3) Π を Δ の基底とすると, Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ によって生成される.

証明 一般性を失わず, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり, V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する (命題 1.7, 系 1.8). Δ の基底 Π を一つ固定し (系 2.6 より存在する), $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ が生成する $\mathbf{W}(\Delta)$ の部分群を $\mathbf{W}'(\Delta)$ と置く. まず (1), (2) で $\mathbf{W}(\Delta)$ を $\mathbf{W}'(\Delta)$ に置き換えた主張 (1'), (2') を示し, 次に (2') を用いて (3) を示す.

(1') $\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の基底全体のなす集合への作用が推移的であることを示す. 定理 2.5 より, $\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の Weyl チャンバー全体の集合への作用が推移的であることを示せばよい. Π に関する正ルートであって割れないものの全体の和の $1/2$ 倍を, ρ と置く. 点 $v \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Sigma_\alpha$ を任意にとり, これに対して, $s \in \mathbf{W}'(\Delta)$ を $\langle s(v), \rho \rangle$ が最大となるようにとる. すると, 任意の $\alpha \in \Pi$ に対して,

$$\langle s(v), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha s(v), \rho \rangle = \langle s(v), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle s(v), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

(最後の等号で系 2.8 を用いた) より $\langle s(v), \alpha \rangle \geq 0$ であり, また $v \notin \Sigma_{s^{-1}(\alpha)}$ より $\langle s(v), \alpha \rangle = \langle v, s^{-1}(\alpha) \rangle \neq 0$ だから, $\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ である. したがって, $s(v) \in C(\Pi)$ であり, これは v を含む Weyl チャンバーが s の作用で $C(\Pi)$ に移ることを意味する. よって, $\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の Weyl チャンバー全体のなす集合への作用は推移的である.

次に, $\mathbf{W}'(\Delta)$ の Δ の基底全体のなす集合への作用が自由であることを示す. 前段で推移性を示したから, $s \in \mathbf{W}'(\Delta) \setminus \{\text{id}_V\}$ として $s(\Pi) \neq \Pi$ を示せば十分である. $s = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$ ($k \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Pi$) と k が最小になる方法で表示すると, 補題 2.9 より $s(\alpha_k)$ は負ルートだから, 特に $s(\Pi) \neq \Pi$ である. これで, 主張が示された.

(2') (1') より, Δ のすべての基底の合併が Δ の割れないルート全体に等しいことを示せばよい. Δ の基底の元がすべて割れないルートであることは, 基底の定義から明らかである. 任意の割れないルート $\alpha \in \Delta$ が Δ のある基底に含まれることを示す. 点 $v_0 \in V$ を

$$\langle v_0, \alpha \rangle = 0, \quad \langle v_0, \beta \rangle \neq 0 \quad (\beta \in \Delta \setminus \mathbb{R}\alpha)$$

となるようにとり, さらに $\epsilon > 0$ を十分小さくにとって

$$\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle > 0, \quad |\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta \rangle| > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle \quad (\beta \in \Delta \setminus \mathbb{R}\alpha)$$

が成り立つようにする. すると, $v_0 + \epsilon\alpha \in V \setminus \bigcup_{\beta \in \Delta} \text{Ker } \Sigma_\beta$ だから, $v_0 + \epsilon\alpha$ を含む Weyl チャンバー C がとれる. 以下, 定理 2.5 の記号 $\Delta_+(C)$, $\Pi(C)$ を用いる. $\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle > 0$ だから, $\alpha \in \Delta_+(C)$ である. また, $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_k$ ($k \geq 1$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Delta_+(C)$) とすると, $\langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle = \langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta_1 \rangle + \cdots + \langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta_k \rangle$ だが, 任意の $\beta \in \Delta_+(C) \setminus \mathbb{R}\alpha$ に対して $\langle v_0 + \epsilon\alpha, \beta \rangle > \langle v_0 + \epsilon\alpha, \alpha \rangle$ だから, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Delta_+(C) \cap \mathbb{R}\alpha$ でなければならない. さらに, α は割れないルートだから, $k = 1$ かつ $\beta_1 = \alpha$ でなければならない. よって, $\alpha \in \Pi(C)$ である. これで, 主張が示された.

(3) 任意の割れないルート $\alpha \in \Delta$ に対して, (2') よりある $t \in \mathbf{W}'(\Delta)$ が存在して $t(\alpha) \in \Pi$ となり, このとき, $s_\alpha = t^{-1}s_{t(\alpha)}t \in \mathbf{W}'(\Delta)$ である (補題 1.12). よって, $\mathbf{W}'(\Delta) = \mathbf{W}(\Delta)$ である. $\square$

系 2.11 Δ_1 と Δ_2 をそれぞれ有限次元ベクトル空間 V_1 と V_2 上の被約ルート系とし, Π_1 と Π_2 をそれぞれ Δ_1 , Δ_2 の基底とする. $\phi: \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ は全単射であり, 任意の $\alpha, \beta \in \Pi_1$ に対して $n(\phi(\beta), \phi(\alpha)) = n(\beta, \alpha)$ を満たすとする. このとき, ϕ はルート系 Δ_1 から Δ_2 への同型に一意に拡張される.

証明 Π_1 と Π_2 はそれぞれ V_1 と V_2 の基底だから、 ϕ は線型同型写像 $\Phi: V_1 \rightarrow V_2$ に一意に拡張される。仮定より、任意の $\alpha, \beta \in \Pi_1$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi(s_\alpha(\beta)) &= \Phi(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) \\ &= \phi(\beta) - n(\beta, \alpha)\phi(\alpha) \\ &= \phi(\beta) - n(\phi(\beta), \phi(\alpha))\phi(\alpha) \\ &= s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))\end{aligned}$$

だから、任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して

$$\Phi \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \Phi$$

である。したがって、線型同型写像 Φ を通して Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta_1)$ と $\mathbf{W}(\Delta_2)$ が対応するから (定理 2.5 (3)), 定理 2.10 (2) と合わせて,

$$\Phi(\Delta_1) = \Phi(\mathbf{W}(\Delta_1)\Pi_1) = \mathbf{W}(\Delta_2)\Pi_2 = \Delta_2$$

を得る。よって、 Φ はルート系 Δ_1 から Δ_2 への同型である。 $\square$

命題 2.12 Δ をルート系とし、 Π をその基底とする。次の条件は同値である。

- (a) Δ は既約である。
- (b) $\Pi \neq \emptyset$ であり、 Π を互いに直交する二つの空でない部分に分割することはできない。

証明 明らかに、 $\Delta = \emptyset$ と $\Pi = \emptyset$ とは同値である。以下、これ以外の場合を考える。

(b) $\implies$ (a) 対偶を示す。 Δ が可約であるとして、ルート系の直和分解 $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ であって Δ_1, Δ_2 が空でないものとする。 $i \in \{1, 2\}$ に対して $\Pi_i = \Pi \cap \Delta_i$ と置くと、これらは空でなく、 Δ_1 と Δ_2 は直交する (命題 1.17) から Π_1 と Π_2 も直交する。これで、主張の対偶が示された。

(a) $\implies$ (b) 対偶を示す。 Π が互いに直交する二つの空でない部分 Π_1, Π_2 に分割されているとする。 $i \in \{1, 2\}$ に対して $\Delta_i = \mathbf{W}(\Delta)\Pi_i \neq \emptyset$ と置く。すると、定理 2.10 (2) より $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ である。また、 $\alpha \in \Pi_1$ に対して s_α は $\text{span}_{\mathbb{K}} \Pi_1$ を安定にし、 $\beta \in \Pi_2$ に対して s_β は $\text{span}_{\mathbb{K}} \Pi_1$ の点を動かさないから (Π_1 と Π_2 が直交することによる)、定理 2.10 (3) と合わせて $\Delta_1 \subseteq \text{span}_{\mathbb{K}} \Pi_1$ を得る。同様に、 $\Delta_2 \subseteq \text{span}_{\mathbb{K}} \Pi_2$ である。よって、 $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ はルート系の直和分解である。これで、主張の対偶が示された。 $\square$

2.3 単純ルートの和

命題 2.13 Δ をルート系とし、 Π をその基底とする。正ルートの列 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta_+(\Pi)$ が、 $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \in \Delta$ を満たすとする。このとき、 $\{1, \dots, k\}$ 上の置換 π であって、任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $\alpha_{\pi(1)} + \dots + \alpha_{\pi(i)} \in \Delta$ を満たすものが存在する。

証明 k に関する帰納法で示す。 $k = 1$ の場合は明らかである。 $k \geq 2$ とし、 $k - 1$ に対する主張は正しいとする。 $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ と置くと、 $n(\alpha_1, \beta) + \dots + n(\alpha_k, \beta) = n(\beta, \beta) = 2$ だから、 $n(\alpha_i, \beta) > 0$ となる $1 \leq i \leq k$ が存在する。この i について、系 1.26 (1) より、 $\beta - \alpha_i \in \Delta$ となる。そこで、 α_i を除く $k - 1$ 個のルートに帰納法の仮定を適用すれば、 k の場合の主張が示される。これで、帰納法が完成した。 $\square$

系 2.14 ルート系 Δ から可換群 A への写像 $f: \Delta \rightarrow A$ が、次の条件を満たすとする。

- (i) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して、 $f(-\alpha) = f(\alpha)^{-1}$ である。

(ii) 任意の $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ に対して, $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$ である.

このとき, f はルート格子 $\text{span}_{\mathbb{Z}} \Delta$ から A への群準同型に一意に拡張される.

証明 Π を Δ の基底とすると, ルート格子 $\text{span}_{\mathbb{Z}} \Delta$ は Π を基底とする格子だから, Π 上で f に一致する群準同型 $\tilde{f}: \text{span}_{\mathbb{Z}} \Delta \rightarrow A$ が一意に存在する. これが f の拡張であることを示そう. 条件 (i) より, 正ルート β に対して $\tilde{f}(\beta) = f(\beta)$ を示せばよい. 命題 2.13 より, 単純ルートの列 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ を, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \beta$ であり, かつ任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \in \Delta$ であるようにとれる. よって, 条件 (ii) より

$$\tilde{f}(\beta) = \tilde{f}(\alpha_1) \cdots \tilde{f}(\alpha_k) = f(\alpha_1) \cdots f(\alpha_k) = f(\beta)$$

である. これで, 主張が示された. $\square$

命題 2.15 Δ をルート系とし, Π をその基底とする. λ はルート格子 $\text{span}_{\mathbb{Z}} \Delta$ の元であり, 一つのルートの整数倍としては書けないとする. このとき, ある $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ が存在して, $s(\lambda)$ を Π の元の線型結合として書くときの係数に, 正の整数と負の整数がともに現れる.

証明 一般性を失わず, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり, V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する (命題 1.7, 系 1.8). 仮定より, $\mathbb{R}\lambda$ はルートを含まないから, $v \in V$ を, $\langle v, \lambda \rangle = 0$ かつ任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\langle v, \alpha \rangle \neq 0$ を満たすようにとれる. さらに, Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ は Weyl チャンバー全体のなす集合に推移的に作用するから (定理 2.5, 定理 2.10), $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を, $s(v) \in C(\Pi)$ (定理 2.5 の記号を用いた) を満たすようにとれる. ここで, $s(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Pi} p_{\alpha} \alpha$ ($p_{\alpha} \in \mathbb{Z}$) と表すと,

$$0 = \langle v, \lambda \rangle = \langle s(v), s(\lambda) \rangle = \sum_{\alpha \in \Pi} p_{\alpha} \langle s(v), \alpha \rangle$$

となるが, $s(v) \in C(\Pi)$ より任意の $\alpha \in \Pi$ に対して $\langle s(v), \alpha \rangle > 0$ だから, 係数 p_{α} には正の整数と負の整数がともに現れる. $\square$

2.4 双対ルート系の基底

補題 2.16 有限次元実ベクトル空間 V の基底 $(e_i)_{i \in I}$ と $(f_j)_{j \in J}$ が

$$\text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \{e_i \mid i \in I\} = \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \{f_j \mid j \in J\}$$

を満たすならば, 全単射 $\phi: I \rightarrow J$ が存在して, 各 $f_{\phi(i)}$ は e_i の正のスカラー倍となる.

証明 $(e_i)_{i \in I}$ から $(f_j)_{j \in J}$ への基底変換行列を $P = (p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ と置き, $(f_j)_{j \in J}$ から $(e_i)_{i \in I}$ への基底変換行列を $Q = (q_{ji})_{(j,i) \in J \times I}$ と置く. 仮定より, 各成分 p_{ij} と q_{ji} は 0 以上である. いま, P の一つの成分 $p_{i_0 j_0}$ が正であるとする. P と Q は互いに他の逆行列だから, 任意の $i \in I \setminus \{i_0\}$ に対して $\sum_{j \in J} p_{i_0 j} q_{ji} = 0$ だが, そのためには $q_{j_0 i} = 0$ でなければならない. すなわち, Q の行ベクトル $(q_{j_0 i})_{i \in I}$ は, i_0 成分を除いて 0 である. 一方で, Q は正則だから, この性質を満たす Q の行ベクトルはたかだか一つである. 以上より, 任意の $i_0 \in I$ に対して, $p_{i_0 j_0} > 0$ を満たす $j_0 \in J$ はたかだか一つである. このことと P の正則性より, 全単射 $\phi: I \rightarrow J$ が存在して,

$$p_{ij} \begin{cases} > 0 & (j = \phi(i)) \\ = 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となる。すなわち、主張が成り立つ。 $\square$

命題 2.17 Δ をルート系とし、 Π をその基底とする。各 $\alpha \in \Pi$ に対して

$$\alpha_{\text{indiv}}^\vee = \begin{cases} \alpha^\vee & (2\alpha \notin \Delta) \\ (2\alpha)^\vee = \alpha^\vee/2 & (2\alpha \in \Delta) \end{cases}$$

と定めると、 $\Pi_{\text{indiv}}^\vee = \{\alpha_{\text{indiv}}^\vee \mid \alpha \in \Pi\}$ は双対ルート系 $\Delta^\vee$ の基底である。特に、 Δ が被約ならば、 $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Pi\}$ は双対ルート系 $\Delta^\vee$ の基底である。

証明 一般性を失わず、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり、 V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する（命題 1.7, 系 1.8）。内積が定める線型同型によって、 V と V^* を同一視する。すると、各ルート $\alpha \in R$ に対して、 $s_\alpha = s_{\alpha^\vee}$ だから（命題 1.13 (4)）、 s_α の鏡映面と $s_{\alpha^\vee}$ の鏡映面は等しい。したがって、 $\Delta^\vee$ の基底 Π' であって、 $C(\Pi) = C(\Pi')$ （定理 2.5 の記号を用いた）を満たすものが存在する。 V の内積に関する Π, Π' の双対基底をそれぞれ Π^*, Π'^* と書くと、 $C(\Pi) = C(\Pi')$ は $\text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi^* = \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi'^*$ を意味するから、補題 2.16 より、 Π'^* は Π^* の各元を適当に正のスカラー倍して得られる集合である。したがって、 Π と Π' についても同様である。ところが、各ルート $\alpha \in \Delta$ に対して、 $\Delta^\vee$ のルートのうち α の正のスカラー倍として書けるものは、 $\alpha^\vee = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle$ 、 $(2\alpha)^\vee = \alpha^\vee/2$ ($2\alpha \in \Delta$ のとき)、 $(\alpha/2)^\vee = 2\alpha^\vee$ ($\alpha/2 \in \Delta$ のとき) のみである（系 1.25）。このうち、 $\Delta^\vee$ の割れないルートであるものは、 $2\alpha \notin \Delta$ ならば $\alpha^\vee$ のみであり、 $2\alpha \in \Delta$ ならば $(2\alpha)^\vee$ のみである。よって、 $\Pi_{\text{indiv}}^\vee = \Pi'$ であり、これは双対ルート系 $\Delta^\vee$ の基底である。

Δ が被約ならば、任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\alpha_{\text{indiv}}^\vee = \alpha^\vee$ だから、 $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Pi\}$ は双対ルート系 $\Delta^\vee$ の基底である。 $\square$

2.5 正ルート全体のなす集合の特徴付け

命題 2.18 Δ をルート系とする。部分集合 $P \subseteq \Delta$ に対して、次の条件は同値である。

- (a) Δ の基底 Π であって、 $P = \Delta_+(\Pi)$ を満たすものが存在する。
- (b) $\alpha, \beta \in P$ かつ $\alpha + \beta \in \Delta$ ならば $\alpha + \beta \in P$ であり、 P と $-P$ は Δ の分割を与える。

さらに、これらの条件の下で、条件 (a) の基底 Π は一意に定まり、

$$\Pi = \{\alpha \in P \mid \alpha \text{ は } P \text{ の重複を許す二つ以上の元の和としては書けない}\}$$

によって与えられる。

証明 (a) $\implies$ (b) 基底の定義から明らかである。

(b) $\implies$ (a) 基底 Π を、 $\#(P \cap \Delta_+(\Pi))$ が最大となるようにとる。 $\alpha \in \Pi$ が P に属しないと仮定すると、 $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ は $P \cap \Delta_+(s_\alpha(\Pi))$ に属する。次に、 $\beta \in P \cap \Delta_+(\Pi)$ を任意にとる。 α は割れないルートだから $\beta \neq \alpha/2$ であり、また $\beta = 2\alpha$ とすると $-\alpha, 2\alpha \in P$ より $\alpha = 2\alpha - \alpha \in P$ となって仮定に反するから、 $\beta \notin \mathbb{K}\alpha$ である（系 1.25）。したがって、補題 2.7 より $s_\alpha(\beta) \in \Delta_+(\Pi)$ だから、 $\beta \in P \cap \Delta_+(s_\alpha(\Pi))$ である。以上より、 $\#(P \cap \Delta_+(s_\alpha(\Pi))) > \#(P \cap \Delta_+(\Pi))$ となるが、これは Π のとり方に反する。よって、背理法より、 $\Pi \subseteq P$ である。

$\Pi \subseteq P$ より $\Delta_+(\Pi) \subseteq P$ だが、 $\Delta_+(\Pi)$ と $\Delta_-(\Pi)$ 、 P と $-P$ はともに Δ の分割を与えるから、 $\Delta_+(\Pi) = P$ が成り立つ。これで、主張が示された。

最後の主張 基底の定義から明らかである。 $\square$

加法群 A 上の半順序 $\leq$ が**平行移動不変**であるとは、任意の $a, b, c \in A$ に対して、 $a \leq b$ ならば $a+c \leq b+c$ であることをいう。容易に確かめられるように、平行移動不変な半順序 $\leq$ について、 $a, b \geq 0$ ならば $a+b \geq 0$ であり、また、 $a \geq 0$ と $-a \leq 0$ とは同値である。

系 2.19 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とする。 $\leq$ を V 上の平行移動不変な全順序とすると、 Δ の基底 Π であって、 $\Delta_+(\Pi) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \geq 0\}$ を満たすものが一意に存在する。

証明 上記の注意と命題 2.18 から従う。 $\square$

3 整ベクトルと優整ベクトル

3.1 整ベクトルと優整ベクトル

定義 3.1 (整ベクトル, 優整ベクトル) Δ を有限次元ベクトル空間 V 上の被約ルート系とする。

- (1) $\lambda \in V$ が Δ に関する**整ベクトル** (integral vector) であるとは、任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であることをいう。
- (2) さらに、 Π を Δ の基底とする。このとき、 $\lambda \in V$ が (Δ, Π) に関する**優整ベクトル** (dominant integral vector) であるとは、任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であることをいう。

Δ を有限次元ベクトル空間 V 上の被約ルート系とし、 Π をその基底とする。このとき、 $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Pi\}$ は双対ルート系 $\Delta^\vee$ の基底である (命題 2.17)。したがって、 $\lambda \in V$ が Δ に関する整ベクトルであるためには、任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して $\alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}$ であれば十分である。また、 V^* の基底 $\Pi^\vee$ の双対基底を $\Pi^{\vee*}$ と書くと、 Δ に関する整ベクトル全体のなす集合は $\text{span}_{\mathbb{Z}} \Pi^{\vee*}$ であり、 (Δ, Π) に関する優整ベクトル全体のなす集合は $\text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi^{\vee*}$ である。

補題 3.2 V を有限次元実内積空間 (その内積を $\langle -, - \rangle$ と書く)、 Π をその基底とし、 V の内積に関する Π の双対基底を Π' と書く。任意の異なる二つの元 $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して、 $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ であるとする。このとき、 $\text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi' \subseteq \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi$ が成り立つ。

証明 $v \in \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi'$ を基底 Π の元の線型結合として表すとき、ある $\alpha \in \Pi$ の係数が負となるとする。このとき、線型形式 $f \in V^*$ を、 $f(\alpha) = 1$ かつ $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ に対して $f(\beta)$ が十分小さい正の実数となるようにとれば、 $f(\Pi \cup \{-v\}) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ となる。したがって、 $\Pi \cup \{-v\}$ は一つの半開空間に含まれる。また、 $v \in \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi'$ より任意の $\beta \in \Pi$ に対して $\langle v, \alpha \rangle \geq 0$ だから、仮定と合わせて、 $\Pi \cup \{-v\}$ の任意の異なる二つの元の内積が 0 以下であることを得る。これらのことと補題 2.4 より、 $\Pi \cup \{-v\}$ は線型独立となるが、これは矛盾である。よって、背理法より、 $\text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi' \subseteq \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi$ である。 $\square$

命題 3.3 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上の被約ルート系とする。

- (1) Δ に関する任意の整ベクトルは、 $V_{\mathbb{Q}} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$ に含まれる。
- (2) さらに、 Π を Δ の基底とする。このとき、 (Δ, Π) に関する任意の優整ベクトルは、 $\text{span}_{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \Pi$ に含まれる。

証明 Π を Δ の基底とする.

(1) V の基底 $\Pi^{\vee*}$ から Π への基底変換行列は (Δ, Π) の Cartan 行列であり, Π から $\Pi^{\vee*}$ への基底変換行列はその逆行列である. 特に, Π から $\Pi^{\vee*}$ への基底変換行列の各成分は有理数である. よって, Δ に関する整ベクトル全体のなす集合 $\text{span}_{\mathbb{Z}} \Pi^{\vee*}$ は, $V_{\mathbb{Q}}$ に含まれる.

(2) 一般性を失わず, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり, V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する (命題 1.7, 系 1.8). $\lambda \in V$ を (Δ, Π) に関する整ベクトルとすると, 任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ である. Π は補題 3.2 の仮定を満たすから (命題 2.2), $\lambda \in \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \Pi$ である. このことと (1) を合わせて, $\lambda \in \text{span}_{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \Pi$ を得る. $\square$

3.2 優整ベクトルと Weyl 群

命題 3.4 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上の被約ルート系とし, Π をその基底とする. Δ に関する任意の整ベクトル $\lambda \in V$ に対して, ある $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ が存在して, $s(\lambda)$ が (Δ, Π) に関する優整ベクトルとなる*2.

証明 一般性を失わず, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であり, V に $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ が定まっていると仮定する (命題 1.7, 系 1.8). $\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta_+(\Pi)} \alpha$ と置き, $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ を $\langle s(\lambda), \rho \rangle$ が最大となるようにとる. すると, 任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して,

$$\langle s(v), \rho \rangle \geq \langle s_{\alpha} s(v), \rho \rangle = \langle s(v), s_{\alpha}(\rho) \rangle = \langle s(v), \rho \rangle - \langle s(v), \alpha \rangle$$

(最後の等号で系 2.8 を用いた) より $\langle s(v), \alpha \rangle \geq 0$, すなわち $\alpha^{\vee}(s(\lambda)) \geq 0$ である*3. よって, $s(\lambda)$ は (Δ, Π) に関する優整ベクトルである. $\square$

命題 3.5 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系とし, Π をその基底とする. V の部分集合 $\mathfrak{X}$ が, 次の条件を満たすとする.

- (i) ある $\lambda \in V$ が存在して, $\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \text{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$ となる.
- (ii) $\mathfrak{X}$ は $\mathbf{W}(\Delta)$ 安定である.

このとき, $\mathfrak{X}$ は有限である.

証明 必要ならば Δ の割れないルート全体のなす被約ルート系 (命題 1.33) を考えることで, 一般性を失わず, Δ は被約であると仮定する. $\mu \in \mathfrak{X}$ とすると, 任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して, 条件 (i) と (ii) より

$$\mu - \alpha^{\vee}(\mu)\alpha = s_{\alpha}(\mu) \in \mathfrak{X} \subseteq \mu + \text{span}_{\mathbb{Z}} \Pi$$

だから, $\alpha^{\vee}(\mu) \in \mathbb{Z}$ である. したがって, 任意の $\mu \in \mathfrak{X}$ は, Δ に関する整ベクトルである. そこで, $\mathfrak{X}$ の元であって (Δ, Π) に関する優整ベクトルであるもの全体のなす集合を $\mathfrak{X}_{++}$ と置くと, 命題 3.4 と条件 (ii) より, $\mathfrak{X} = \mathbf{W}(\Delta)\mathfrak{X}_{++}$ が成り立つ. さらに, 命題 3.3 (2) と条件 (i) より, $\mathfrak{X}_{++}$ は有限である. よって, $\mathfrak{X}$ は有限である. $\square$

*2 より強く, 軌道 $\mathbf{W}(\Delta)\lambda$ がただ一つの優整ベクトルを含むことまでいえる. 証明は, Humphreys [2, §10.3, Lemma B] を参照のこと.

*3 定理 2.10 の証明の (1') でも, 同じような議論をした.

4 ルート系の分類

4.1 Cartan 行列と Dynkin 図形

定義 4.1 (Cartan 行列) Δ をルート系とし, Π をその基底とする. 行列 $(n(\beta, \alpha))_{(\beta, \alpha) \in \Pi \times \Pi}$ を, (Δ, Π) の **Cartan 行列** (Cartan matrix) という.

命題 4.2 ルート系 Δ とその基底 Π に対して, (Δ, Π) の Cartan 行列は正則である.

証明 $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な非退化対称双線型形式 $\langle -, - \rangle$ を固定すると, $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $n(\beta, \alpha) = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ である (系 1.8). Π が V の基底であることより, 行列 $(\langle \beta, \alpha \rangle)_{(\beta, \alpha) \in \Pi \times \Pi}$ は正則だから, Cartan 行列 $(n(\beta, \alpha))_{(\beta, \alpha) \in \Pi \times \Pi}$ も正則である. $\square$

Cartan 行列を視覚的に表すものとして, Dynkin 図形を導入する. そのための準備として, 次の用語を定義する.

定義 4.3 (不等号付き多重グラフ) **不等号付き多重グラフ**^{*4} とは, 次の条件を満たす組 (Γ, c) をいう.

- (i) Γ は多重グラフである.
- (ii) c は, Γ において 2 重以上の辺で結ばれている 2 頂点の集合 $\{\alpha, \beta\}$ に対して, α と β のいずれかを対応させる写像である.

不等号付き多重グラフ (Γ, c) は, 多重グラフ Γ を表す図において, 2 重以上の辺に, c によって選ばれた頂点のほうが「大きい」とする不等号を書き込むことで表される. たとえば, 頂点 α と β が Γ において 2 重辺で結ばれており, $c(\{\alpha, \beta\}) = \beta$ であるとき, 不等号付き多重グラフ (Γ, c) における頂点 α と β は, 次のように表される.



Δ をルート系とし, Π をその基底とする. 異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, $(n(\alpha, \beta), n(\beta, \alpha))$ は $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, -3)$, $(-3, -1)$ のいずれかだから (定理 1.23, 命題 2.2), $n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha)$ は $0, 1, 2, 3$ のいずれかである. また, 定理 1.23 と注意 1.24 (1) より,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ と } \beta \text{ が直交しない} &\iff n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) \geq 1, \\ \alpha \text{ と } \beta \text{ が直交せず, 異なる長さをもつ} &\iff n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) \geq 2 \end{aligned}$$

である (「異なる長さをもつ」の意味については, 注意 1.22 を参照のこと). 以上を踏まえて, 次のように定義する.

定義 4.4 (Dynkin 図形) ルート系 Δ とその基底 Π に対して, 次のように定まる不等号付きグラフ (Γ, c) を, (Δ, Π) の **Dynkin 図形** (Dynkin diagram) という (表 3 も参照のこと).

- (i) Γ は, Π を頂点集合とし, 異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ を $n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha)$ 本の辺で結んで得られる多重グラフである.

^{*4} 「不等号付き多重グラフ」は, 本稿だけの用語である.

表 3 Dynkin 図形の辺と不等号

$n(\alpha, \beta)$	$n(\beta, \alpha)$	頂点 α (左) と β (右) を結ぶ辺と不等号
0	0	• •
-1	-1	• — •
-1	-2	• $\Leftarrow$ •
-2	-1	• $\Rightarrow$ •
-1	-3	• $\Leftarrow\Leftarrow$ •
-3	-1	• $\Rightarrow\Rightarrow$ •

(ii) c は, Γ において 2 重以上の辺で結ばれている 2 頂点の集合 $\{\alpha, \beta\}$ に対して, α と β のうち長いほうを対応させる写像である.

命題 4.5 ルート系 Δ とその基底 Π に対して, 次の条件は同値である.

- (a) Δ は既約である.
- (b) (Δ, Π) の Dynkin 図形は連結である.

証明 命題 2.12 のいいかえにすぎない. □

定理 2.10 と系 2.11 より, 被約なルート系の同型類は Cartan 行列の同型類と一対一に対応し, したがって, Dynkin 図形の同型類とも一対一に対応する. さらに, 命題 4.5 より, その中で, 被約な既約ルート系の同型類と連結 Dynkin 図形の同型類が一対一に対応する. よって, 被約な既約ルート系を分類するためには, 連結 Dynkin 図形としてありうるものを絞り込んだ上で, それらの連結 Dynkin 図形に対応する既約ルート系が構成できるかどうかを考えればよい.

4.2 Dynkin 図形の分類

Δ は有限次元実内積空間 V 上のルート系であり, その内積は $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変であるとする. Π を Δ の基底とすると,

- Π は V の基底だから, 特に線型独立である.
- 任意の $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ である (命題 2.2).
- (Δ, Π) の Dynkin 図形において, α と β を結ぶ辺の本数は

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \cdot \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 4 \left\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|} \right\rangle^2$$

であり (系 1.8 (2)), これは 0, 1, 2, 3 のいずれかである (定理 1.23).

これを踏まえて, 次のように定義する.

定義 4.6 (許容可能なベクトルの集合) V を有限次元実内積空間とする. 単位ベクトルの集合 S が **許容可能** (admissible) であるとは, 次の条件を満たすことをいう.

- (i) S は線型独立である.
- (ii) 任意の異なる二つの元 $v, w \in S$ に対して, $\langle v, w \rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である (あるいは同値だが, $\angle(v, w) \in \{90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ\}$ である).

定義 4.7 (許容可能な多重グラフ) 許容可能な単位ベクトルの集合 S に対して, 多重グラフ $\Gamma(S)$ を, S を頂点集合とし, 異なる 2 頂点 $v, w \in S$ が $4\langle v, w \rangle^2$ 本の辺で結ばれるものとして定める. 多重グラフ Γ は, ある許容可能な単位ベクトルの集合 S に対する $\Gamma(S)$ に同型であるとき, **許容可能** (admissible) であるという.

注意 4.8 Δ を有限次元ベクトル空間 V 上のルート系, Π をその基底とし, (Γ, c) を (Δ, Π) の Dynkin 図形とする. Δ を有限次元実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ ($V_{\mathbb{Q}} = \text{span}_{\mathbb{Q}} \Delta$) 上のルート系とみなし (命題 1.7), $V_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathbf{W}(\Delta)$ 不変な内積 $\langle -, - \rangle$ を一つ固定する (系 1.8 (1)). このとき,

$$S = \left\{ \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \mid \alpha \in \Pi \right\}$$

は許容可能な単位ベクトルの集合であり, 対応する多重グラフ $\Gamma(S)$ は Γ に等しい. よって, Γ は許容可能である.

以下, 許容可能な連結多重グラフを分類する.

補題 4.9 許容可能な多重グラフは, (長さ 3 以上の) サイクルを含まない.

証明 S を許容可能な単位ベクトルの集合とし, $\Gamma(S)$ において $S_0 \subseteq S$ がサイクルをなすとする. $v, w \in S_0$ を異なる 2 頂点とすると $\langle v, w \rangle \leq 0$ だが, S_0 に属する頂点どうしを結ぶ辺は少なくとも $\#S_0$ 本あるから, このうち少なくとも $2\#S_0$ 組の (v, w) (順序を考慮するため 2 倍になる) に対して $\langle v, w \rangle \leq -1/2$ である. したがって,

$$\left\| \sum_{v \in S_0} v \right\|^2 = \#S_0 + \sum_{v, w \in S_0, v \neq w} \langle v, w \rangle \leq \#S_0 + 2\#S_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

であり, $\sum_{v \in S_0} v = 0$ を得るが, これは S が線型独立であることに反する. よって, 背理法より, $\Gamma(S)$ はサイクルを含まない. $\square$

補題 4.10 許容可能な多重グラフにおいて, 各頂点の次数 (その頂点から伸びている辺の本数) は 3 以下である.

証明 S を許容可能な単位ベクトルの集合とする. $v \in S$ とし, $\Gamma(S)$ において v と辺で結ばれている頂点全体の集合を S_v と置く. 補題 4.9 より, S_v に属するどの 2 頂点も辺で結ばれていないから, S_v は正規直交系をなす. S が線型独立であることより $v \notin \text{span}_{\mathbb{R}} S_v$ だから,

$$4 \sum_{w \in S_v} \langle v, w \rangle^2 < 4\|v\|^2 = 4$$

である. 頂点 v と w は $4\langle v, w \rangle^2$ 本の辺で結ばれているから, 上式は, 頂点 v の次数が 3 以下であることを示す. $\square$

補題 4.11 Γ を許容可能な多重グラフとする. $v_0, \dots, v_k$ ($k \in \mathbb{N}$) は Γ の異なる頂点の列であり, 各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して, v_i は v_{i-1} および v_{i+1} とそれぞれちょうど 1 本の辺で結ばれ, それ以外の頂点とは

表 4 許容可能な連結多重グラフの分類

型 (l は頂点数)	多重グラフ
A_l ($l \geq 1$)	
$B_l = C_l$ ($l \geq 2$)	
D_l ($l \geq 4$)	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

辺で結ばれていないとする。このとき、 $v_0, \dots, v_k$ を一つの頂点に潰して得られる多重グラフ Γ' は、また許容可能である。

証明 Γ は、許容可能な単位ベクトルの集合 S に対応する多重グラフ $\Gamma(S)$ であるとしてよい。 $v = v_0 + \dots + v_k$, $S' = (S \setminus \{v_0, \dots, v_k\}) \cup \{v\}$ と置く (S は線型独立だから、 $v \notin S$ である)。すると、

- S は線型独立だから、 S' も線型独立である。
- $\|v\|^2 = \sum_{0 \leq i, j \leq k} \langle v_i, v_j \rangle = k - (k-1) = 1$ である。
- 任意の $w \in S' \setminus \{v\}$ について、仮定より $\langle v_i, w \rangle = 0$ ($1 \leq i \leq k-1$) であり、補題 4.9 より $\langle v_0, w \rangle$ と $\langle v_k, w \rangle$ のうち少なくとも一方は 0 である。したがって、 $\langle v, w \rangle = \sum_{i=0}^k \langle v_i, w \rangle$ は 0 または $\langle v_0, w \rangle$ または $\langle v_k, w \rangle$ に等しく、いずれにしても $\langle v, w \rangle \leq 0$ かつ $4\langle v, w \rangle^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ である。

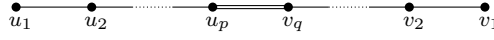
よって、 S' は許容可能な単位ベクトルの集合であり、対応する多重グラフ $\Gamma(S')$ は Γ' に同型である。よって、 Γ' は許容可能である。 $\square$

定理 4.12 (許容可能な連結多重グラフの分類) 許容可能な連結多重グラフは、表 4 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である。

証明 S を許容可能な単位ベクトルの集合とし、 $\Gamma = \Gamma(S)$ と置く。 Γ は連結であるとする。

(I) Γ が 3 重辺をもつ場合、補題 4.10 より、 Γ は G_2 に同型である。

(II) Γ が 3 重辺をもたず 2 重辺をもつ場合、2 重辺はただ一つであり、2 重辺の両端以外に次数 3 以上の頂点は存在しない (存在するとすると、補題 4.11 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ、補題 4.10 に反する)。したがって、 Γ は次の形である ($1 \leq p \leq q$)。



ここで,

$$u = \sum_{i=1}^p i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^q i v_i$$

と置くと,

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \text{同様に } \|v\|^2 = \frac{q(q+1)}{2},$$

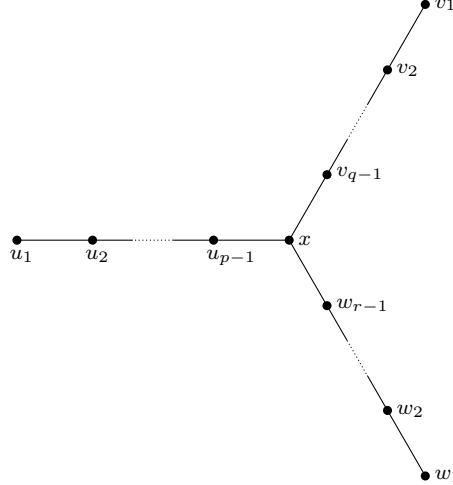
$$\langle u, v \rangle^2 = \frac{p^2 q^2}{2}$$

である. u と v が線型独立であることと Cauchy-Schwarz の不等式より $\langle u, v \rangle^2 < \|u\|^2 \|v\|^2$ だから,

$$\frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \cdot \frac{q(q+1)}{2}$$

である. これを整理すると $pq < p+q+1$ となり, これを満たす (p, q) は, $(1, l-1)$ ($l \geq 2$ は任意) と $(2, 2)$ のみである. それぞれの場合, Γ は $B_l = C_l$ と F_4 に同型である.

(III) Γ が 1 重辺のみをもつ場合, 次数 3 以上の頂点はたかだか一つである (二つ以上あるとすると, 補題 4.11 の操作により次数 4 以上の頂点を作ることができ, 補題 4.10 に反する). 次数 3 の頂点が存在しなければ, Γ はある A_l ($l \geq 1$) に同型である. 次数 3 の頂点が存在すれば, Γ は次の形である ($2 \leq p \leq q \leq r$).



ここで,

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{q-1} i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{r-1} i w_i$$

と置くと, u, v, w は直交系であり, (II) と同じ計算により

$$\|u\|^2 = \frac{p(p-1)}{2}, \quad \|v\|^2 = \frac{q(q-1)}{2}, \quad \|w\|^2 = \frac{r(r-1)}{2},$$

$$\langle u, x \rangle^2 = \frac{(p-1)^2}{4}, \quad \langle v, x \rangle^2 = \frac{(q-1)^2}{4}, \quad \langle w, x \rangle^2 = \frac{(r-1)^2}{4}$$

表 5 連結 Dynkin 図形の分類

型 (l は頂点数)	Dynkin 図形
A_l ($l \geq 1$)	
B_l ($l \geq 2$)	
C_l ($l \geq 3$)	
D_l ($l \geq 4$)	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

を得る。したがって, $x \notin \text{span}_{\mathbb{R}}\{u, v, w\}$ と合わせて,

$$\begin{aligned}
 1 = \|x\|^2 &> \left\langle \frac{u}{\|u\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{v}{\|v\|}, x \right\rangle^2 + \left\langle \frac{w}{\|w\|}, x \right\rangle^2 \\
 &= \frac{(p-1)^2/4}{p(p-1)/2} + \frac{(q-1)^2/4}{q(q-1)/2} + \frac{(r-1)^2/4}{r(r-1)/2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right)
 \end{aligned}$$

を得る。これを整理すると $1/p + 1/q + 1/r > 1$ となり, これを満たす (p, q, r) は, $(2, 2, l-2)$ ($l \geq 4$ は任意), $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ のみである。それぞれの場合, Γ は D_l , E_6 , E_7 , E_8 に同型である。□

定理 4.13 (連結 Dynkin 図形の分類) 許容可能な連結多重グラフは, 表 5 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である。

証明 (Γ, c) を連結 Dynkin 図形とすると, Γ は許容可能な連結多重グラフである (注意 4.8)。許容可能な連結多重グラフ Γ は定理 4.12 で分類されており, 対応する c としてありうるものは, 同型を除いて, 表 5 に挙げたもので尽くされる。よって, 連結 Dynkin 図形は, 表 5 に挙げたもののいずれかただ一つに同型である。□

表 5 に従って, A_l ($l \geq 1$), B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$), D_l ($l \geq 4$), E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 型の Dynkin 図形を定める。便宜上, A_1 型を B_1 型や C_1 型, B_2 型を C_2 型, A_1 型の二つの直和を D_2 型, A_3 型を D_3 型ともいう。 A_l ($l \geq 1$), B_l ($l \geq 1$), C_l ($l \geq 1$), D_l ($l \geq 2$), E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 型のルート系とは, 被約なルート系であって, 対応する型の Dynkin 図形をもつものをいう。これらは, D_2 型のルート系を除いては, 既約である。

4.3 被約な既約ルート系の構成と分類

本小節では、定理 4.13 で示した連結 Dynkin 図形に対応する被約な既約ルート系を、具体的に構成する。以下、 $\mathbb{K}^n$ の標準基底を $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ と書く。構成は、 $\mathbb{K}^n$ あるいはその部分ベクトル空間上で行い、標準的な対称双線型形式 $(\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i, \sum_{i=1}^n b_i \epsilon_i) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i b_i$ が Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta)$ に関して不変となるようにする。

A_l 型 ($l \geq 1$) の既約ルート系

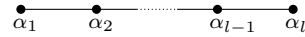
$$V = \{\sum_{i=1}^{l+1} t_i \epsilon_i \in \mathbb{K}^{l+1} \mid t_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{l+1} t_i = 0\} \text{ の部分集合}$$

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$$

は、 $l(l+1)$ 個のルートからなる V 上のルート系である。 Δ は、 A_l 型の既約ルート系である。 実際、

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, \\ \alpha_i &= \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l) \end{aligned}$$

は Δ の基底であり、対応する Dynkin 図形は次のとおりである。



B_l 型 ($l \geq 1$) の既約ルート系

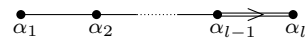
$$V = \mathbb{K}^l \text{ の部分集合}$$

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は、 $2l^2$ 個のルートからなる V 上のルート系である。 Δ は、 B_l 型の既約ルート系である。 実際、

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, \\ \alpha_i &= \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \quad \alpha_l = \epsilon_l \end{aligned}$$

は Δ の基底であり、対応する Dynkin 図形は次のとおりである。



C_l 型 ($l \geq 1$) の既約ルート系

$$V = \mathbb{K}^l \text{ の部分集合}$$

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は、 $2l^2$ 個のルートからなる V 上のルート系である。 Δ は、 C_l 型の既約ルート系である。 実際、

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, \\ \alpha_i &= \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \quad \alpha_l = 2\epsilon_l \end{aligned}$$

は Δ の基底であり、対応する Dynkin 図形は次のとおりである。



D_l 型 ($l \geq 2$) の (既約) ルート系

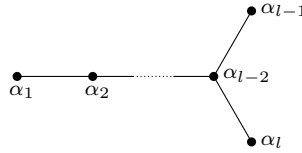
$V = \mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

は, $2l(l-1)$ 個のルートからなる V 上のルート系である. Δ は, D_l 型の ($l \geq 3$ ならば既約) ルート系である. 実際,

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, \\ \alpha_i &= \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \quad \alpha_l = \epsilon_{l-1} + \epsilon_l \end{aligned}$$

は Δ の基底であり, 対応する Dynkin 図形は次のとおりである.



E_6 型の既約ルート系

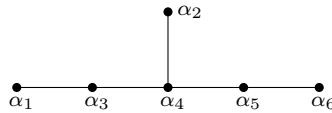
$V = \{\sum_{i=1}^8 t_i \epsilon_i \in \mathbb{K}^8 \mid t_i \in \mathbb{K}, t_6 + t_8 = t_7 + t_8 = 0\}$ の部分集合

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \\ &\cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^5 (-1)^{\nu(i)} \epsilon_i - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8 \right) \mid \nu(i) \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^5 \nu(i) \in 2\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

は, 72 個のルートからなる V 上のルート系である. Δ は, E_6 型の既約ルート系である. 実際,

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\ \alpha_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \quad \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4 \end{aligned}$$

は Δ の基底であり, 対応する Dynkin 図形は次のとおりである.



E_7 型の既約ルート系

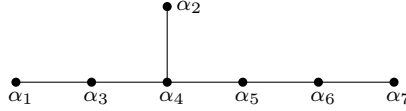
$V = \{\sum_{i=1}^8 t_i \epsilon_i \in \mathbb{K}^8 \mid t_i \in \mathbb{K}, t_7 + t_8 = 0\}$ の部分集合

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-\epsilon_7 + \epsilon_8)\} \\ &\cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^6 (-1)^{\nu(i)} \epsilon_i - \epsilon_7 + \epsilon_8 \right) \mid \nu(i) \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^6 \nu(i) \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\} \end{aligned}$$

は, 126 個のルートからなる V 上のルート系である. Δ は, E_7 型の既約ルート系である. 実際,

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\ \alpha_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \quad \alpha_6 = \epsilon_5 - \epsilon_4, \quad \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5 \end{aligned}$$

は Δ の基底であり, 対応する Dynkin 図形は次のとおりである.



E_8 型の既約ルート系

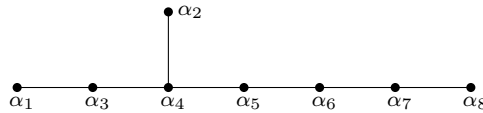
$V = \mathbb{K}^8$ の部分集合

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\pm(\pm\epsilon_i + \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \\ &\cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^7 (-1)^{\nu(i)} \epsilon_i + \epsilon_8 \right) \mid \nu(i) \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^7 \nu(i) \in 2\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

は, 240 個のルートからなる V 上のルート系である. Δ は, E_8 型の既約ルート系である. 実際,

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8), \\ \alpha_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3, \\ \alpha_6 &= \epsilon_5 - \epsilon_4, \quad \alpha_7 = \epsilon_6 - \epsilon_5, \quad \alpha_8 = \epsilon_7 - \epsilon_6 \end{aligned}$$

は Δ の基底であり, 対応する Dynkin 図形は次のとおりである.



F_4 型の既約ルート系

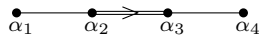
$V = \mathbb{K}^4$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{ \pm \frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4) \right\}$$

は, 48 個のルートからなる V 上のルート系である. Δ は, F_4 型の既約ルート系である. 実際,

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \\ \alpha_1 &= \epsilon_2 - \epsilon_3, \quad \alpha_2 = \epsilon_3 - \epsilon_4, \quad \alpha_3 = \epsilon_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \end{aligned}$$

は Δ の基底であり, 対応する Dynkin 図形は次のとおりである.



G_2 型の既約ルート系

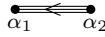
$V = \{\sum_{i=1}^3 t_i \epsilon_i \in \mathbb{K}^3 \mid t_i \in \mathbb{K}, t_1 + t_2 + t_3 = 0\}$ の部分集合

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_1 - \epsilon_2), \pm(-\epsilon_1 + \epsilon_3), \pm(-\epsilon_2 + \epsilon_3), \pm(-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \pm(\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_3), \pm(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3)\}$$

は, 12 個のルートからなる V 上のルート系である. Δ は, G_2 型の既約ルート系である. 実際,

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2\}, \\ \alpha_1 &= \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \alpha_2 = -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

は Δ の基底であり, 対応する Dynkin 図形は次のとおりである.



4.4 被約でない既約ルート系の構成と分類

Δ を被約でない既約ルート系とすると, 定理 1.36 より, 次が成り立つ.

- (1) Δ の各ルートの最短ルートに対する長さの比は, 1, $\sqrt{2}$, 2 のいずれかである. 以下, 最短ルートに対する長さの比が 1, $\sqrt{2}$, 2 であるルート全体のなす集合を, それぞれ A , B , C と書く.
- (2) $2A = C$ である.
- (3) A に属する異なる二つのルートは, 直交する.
- (4) $\Delta' = A \cup B$ と $\Delta'' = B \cup C$ は, V 上の被約な既約ルート系である.

長さの比の条件と (3), (4) より, $\Delta' = A \cup B$ は, B_l 型 ($l \geq 1$) の既約ルート系でなければならない. したがって, Δ は, 線型同型を除いて, $\mathbb{K}^l$ の部分集合

$$\{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i, \pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

と同一視できる.

逆に, Δ を上記の $V = \mathbb{K}^l$ の部分集合と定めると, 容易に確かめられるように, これは V 上の $2l(l+1)$ 個のルートからなる被約でないルート系である. さらに, 割れないルートの全体

$$\Delta' = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

は B_l 型の既約ルート系だから, Δ も既約である (命題 1.33 (1)). なお, $\Delta'' = \{\alpha \in \Delta \mid 2\alpha \notin \Delta\}$ (注意 1.34) は

$$\Delta'' = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

となり, これは C_l 型の既約ルート系である.

以上より, 各整数 $l \geq 1$ に対して, 階数 l の被約でない既約ルート系が同型を除いて一意に存在する. これを, **BC_l 型のルート系** という.

参考文献

- [1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4 à 6*, Springer, 2007.
- [2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.