

分裂簡約 Lie 代数

<https://socculus.com>

2026 年 8 月 15 日

概要

分裂簡約 Lie 代数の構造論および表現論を解説する。構造論については、分裂簡約 Lie 代数からルート系が定義されることを見たあと、それを用いて分裂可能単純 Lie 代数を分類する。表現論については、最高ウェイト理論を解説する。

目次

記号と用語	2
1 Cartan 部分代数	2
1.1 Cartan 部分代数	2
1.2 同時広義固有空間に関する準備	3
1.3 Cartan 部分代数の存在	6
1.4 多項式写像に関する準備	8
1.5 Cartan 部分代数の共役性	10
1.6 簡約 Lie 代数の Cartan 部分代数	13
2 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現	14
2.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群のウェイト	14
2.2 最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群	15
2.3 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群	17
3 分裂簡約 Lie 代数	19
3.1 分裂簡約 Lie 代数とそのルート系	19
3.2 分裂簡約 Lie 代数における $\mathfrak{sl}_2$ 三対	21
3.3 被約ルート系の公理を満たすことの証明	23
3.4 存在定理	27
3.5 一意性定理と同型定理	34
3.6 古典型分裂単純 Lie 代数	36
3.7 分裂可能単純 Lie 代数の分類	43
4 分裂簡約 Lie 代数の表現	45
4.1 $\mathfrak{g}$ 加群のウェイト	45

4.2	最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群	46
4.3	Verma 加群	48
4.4	整ベクトルと優整ベクトルに関する補足	50
4.5	条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群	51
4.6	最高ウェイト理論	53
	参考文献	56

記号と用語

- 本稿を通して、特に断らない限り、 $\mathbb{K}$ を可換体とし、ベクトル空間などの係数体は $\mathbb{K}$ であるとする.
- ベクトル空間 V のテンソル代数を $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^n(V)$ と書き、対称代数を $\mathbf{S}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{S}^n(V)$ と書く.
- Lie 代数に関する記号と用語は、「Lie 代数」による.
- ルート系に関する記号と用語は、「ルート系」による.

1 Cartan 部分代数

1.1 Cartan 部分代数

定義 1.1 (Cartan 部分代数) 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の **Cartan 部分代数** (Cartan subalgebra) とは、 $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ であって、 $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ を満たすものをいう.

$\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{g}'$ をその部分 Lie 代数とすると、 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ならば、明らかに、 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数でもある.

命題 1.2 有限次元冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は、 $\mathfrak{g}$ 自身を唯一の Cartan 部分代数にもつ.

証明 明らかに、 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である. これが唯一の Cartan 部分代数であることを示す. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の真部分 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})$ を満たす最大の $p \in \mathbb{N}$ をとる. すると、

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h} + \mathcal{C}^p(\mathfrak{g})] \subseteq \mathfrak{h} + \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$$

となるから、 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ が成り立つ. よって、 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ではない. □

系 1.3 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする. このとき、 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の極大冪零部分 Lie 代数 (すなわち、冪零部分 Lie 代数の中で包含関係に関して極大なもの) である.

証明 定義より、Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は冪零である. また、 $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}'$ が $\mathfrak{h}$ を含むとすると、 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}'$ の Cartan 部分代数でもあるから、命題 1.2 より $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ である. □

系 1.4 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする. $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ がともに $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であり、 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$ を満たすならば、 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ である.

証明 系 1.3 から従う. □

命題 1.5 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を有限次元 Lie 代数の有限族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数とすると, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である. 逆に, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は, すべてこのようにして得られる.

証明 冪零 Lie 代数の直和は冪零である (参照). また, 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ の部分ベクトル空間として, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ と置くと, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{i \in I} N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$ である. よって, 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数とすると, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である.

逆に, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とする. 各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i$ への射影による $\mathfrak{h}$ の像を $\mathfrak{h}_i$ と置くと, それらの直和 $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ は冪零だから (参照), 系 1.3 より $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ が成り立つ. また, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{i \in I} N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$ は $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ に等しいから, 任意の $i \in I$ に対して $N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$ は $\mathfrak{h}_i$ に等しい. よって, 各 $\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数である. $\square$

命題 1.6 $\mathbb{K}$ を可換体とし, $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする.

- (1) $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ について, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であることと, $\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}$ が $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Cartan 部分代数であることは同値である.
- (2) $\mathbb{K}'$ は $\mathbb{K}$ の有限次拡大体であるとする. このとき, $\mathbb{K}'$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}'$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}'$ について, $\mathfrak{h}'$ が $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数であることと, $\mathfrak{h}'_{[\mathbb{K}]}$ が $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ の Cartan 部分代数であることは同値である. さらに, $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ の任意の Cartan 部分代数は, $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ を用いて $\mathfrak{h}'_{[\mathbb{K}]}$ と書ける.

証明 (1) 冪零性が係数拡大で不変であること (参照) から従う.

(2) 前半の主張は, 冪零性が係数の制限で不変であること (参照) から従う.

後半の主張を示す. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}'_{[\mathbb{K}]}$ の Cartan 部分代数とする. $\mathfrak{h}$ が冪零であることより $\text{span}_{\mathbb{K}'} \mathfrak{h}$ も冪零だから, 系 1.3 より $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{K}'} \mathfrak{h}$ が成り立つ. よって, 後半の主張は, 前半の主張から従う. $\square$

1.2 同時広義固有空間に関する準備

本小節では, S を集合, V をベクトル空間とし, 写像 $\rho: S \rightarrow \text{End}(V)$ が定まっているとき, $\lambda \in \mathbb{K}^S$ に対して

$$V^\lambda(S) = \{v \in V \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対してある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } (\rho(s) - \lambda(s))^n v = 0\}$$

と書く. S が 1 元集合 $\{s\}$ である場合には, $V^\lambda(S)$ を単に $V^{\lambda(s)}(s)$ と書く. 定義から明らかに, $V^\lambda(S)$ は V の部分ベクトル空間であり,

$$V^\lambda(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s)$$

が成り立つ.

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数, S をその部分集合とするとき, 特に断らなければ, 写像 $\text{ad}|_S: S \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ を考えることにより, 記号 $\mathfrak{g}^\lambda(S)$ ($\lambda \in \mathbb{K}^S$) を用いる. すなわち,

$$\mathfrak{g}^\lambda(S) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } s \in S \text{ に対してある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } (\text{ad}(s) - \lambda(s))^n x = 0\}$$

と書く. この記号は, 本節の以下の部分を通して用いる.

命題 1.7 S を集合, V をベクトル空間とし, $\rho: S \rightarrow \text{End}(V)$ を写像とする. このとき, 和 $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ は直和である.

証明 異なる有限個の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}^S$ を任意にとり, 各 $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $v_i \in V^{\lambda_i}(S)$ とするとき, $v_1 + \dots + v_k = 0$ ならば $v_1 = \dots = v_k = 0$ であることを示せばよい. この主張を, k に関する帰納法で示す. $k = 0, 1$ のとき, 主張は明らかである. $k \geq 2$ とし, k がより小さい場合には主張が成り立つとする. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ は異なるから, $\lambda_1(s) = \dots = \lambda_k(s)$ が成り立たないような $s \in S$ がとれる. 各 v_i は $\rho(s)$ の広義固有空間 $V^{\lambda_i(s)}(s)$ に属し, 線型代数の一般論より, 広義固有空間の和 $\sum_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ は直和である. したがって, $v_1 + \dots + v_k = 0$ ならば, 任意の $\mu \in \mathbb{K}$ に対して

$$\sum_{i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(s) = \mu} v_i = 0$$

が成り立つ. s のとり方より, 任意の $\mu \in \mathbb{K}$ に対して $\{i \in \{1, \dots, k\} \mid \lambda_i(s) = \mu\}$ は $\{1, \dots, k\}$ 全体にはならない. よって, 上式と帰納法の仮定より, $v_1 = \dots = v_k = 0$ を得る. これで, 帰納法が完成した. $\square$

命題 1.8 S を集合, V_1, V_2, W をベクトル空間とし, $\rho_1: S \rightarrow \text{End}(V_1)$, $\rho_2: S \rightarrow \text{End}(V_2)$, $\sigma: S \rightarrow \text{End}(W)$ を写像とする. $\Phi: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ は双線型写像であり, 任意の $s \in S$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ に対して

$$\Phi(\rho_1(s)v_1, v_2) + \Phi(v_1, \rho_2(s)v_2) = \sigma(s)\Phi(v_1, v_2)$$

を満たすとする. このとき, 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^S$ に対して,

$$\Phi(V_1^{\lambda_1}(S), V_2^{\lambda_2}(S)) \subseteq W^{\lambda_1 + \lambda_2}(S)$$

が成り立つ.

証明 仮定より, 任意の $s \in S$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ に対して

$$(\sigma(s) - \lambda_1(s) - \lambda_2(s))\Phi(v_1, v_2) = \Phi((\rho_1(s) - \lambda_1(s))v_1, (\rho_2(s) - \lambda_2(s))v_2)$$

だから, $n \in \mathbb{N}$ とすると

$$(\sigma(s) - \lambda_1(s) - \lambda_2(s))^n \Phi(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi((\rho_1(s) - \lambda_1(s))^{n-k} v_1, (\rho_2(s) - \lambda_2(s))^k v_2)$$

である. よって, $v_1 \in V_1^{\lambda_1}(S)$ かつ $v_2 \in V_2^{\lambda_2}(S)$ ならば, $\Phi(v_1, v_2) \in W^{\lambda_1 + \lambda_2}(S)$ である. $\square$

系 1.9 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, S をその部分集合とする. このとき, 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^S$ に対して, $[\mathfrak{g}^\lambda(S), \mathfrak{g}^\mu(S)] \subseteq \mathfrak{g}^{\lambda + \mu}(S)$ が成り立つ. 特に, $\mathfrak{g}^0(S)$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である.

証明 命題 1.8 から従う. $\square$

系 1.10 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, S をその部分集合とし, $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を不変な双線型形式とする. このとき, 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^S$, $\lambda + \mu \neq 0$ に対して, $B(\mathfrak{g}^\lambda(S), \mathfrak{g}^\mu(S)) = 0$ が成り立つ.

証明 写像 $\rho_1, \rho_2: S \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ を $\rho_1(x) = \rho_2(x) = \text{ad}(x)$ によって定め, 写像 $\sigma: S \rightarrow \text{End}(\mathbb{K})$ を $\sigma(x) = 0$ によって定めると, B の不変性より, これらは命題 1.8 の仮定を満たす. よって, 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^S$, $\lambda + \mu \neq 0$ に対して, $B(\mathfrak{g}^\lambda(S), \mathfrak{g}^\mu(S)) \subseteq \mathbb{K}^{\lambda + \mu}(S) = 0$ である. $\square$

補題 1.11 V をベクトル空間, $x, y \in \text{End}(V)$ とし, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)^n y = 0$ を満たすとする. このとき, 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して, 広義固有空間 $V^\lambda(x)$ は y 安定である.

証明 双線型写像 $\Phi: \text{End}(V) \times V \rightarrow V$ を $\Phi(z, v) = z(v)$ によって定めると、任意の $z \in \text{End}(V)$ と $v \in V$ に対して $x(\Phi(z, v)) = \Phi(z, x(v)) + \Phi(\text{ad}(x)z, v)$ が成り立つ。したがって、 Φ に対して命題 1.8 を適用することで、 $\Phi(\text{End}(V)^0(\text{ad}(x)), V^\lambda(x)) \subseteq V^\lambda(x)$ を得る。仮定より $y \in \text{End}(V)^0(\text{ad}(x))$ だから、 $V^\lambda(x)$ は y 安定である。 $\square$

命題 1.12 S を集合、 V を有限次元ベクトル空間とし、 $\rho: S \rightarrow \text{End}(V)$ を写像とする。このとき、次の条件は同値である。

- (a) 直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ が成立し、任意の $\lambda \in \mathbb{K}^S$ に対して、 $V^\lambda(S)$ は $\rho(S)$ 安定である。
- (b) $\rho(S)$ の任意の元は三角化可能であり、かつ任意の $s, s' \in S$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s') = 0$ を満たす。

証明 (a) $\implies$ (b) 条件 (a) が成り立つとして、 $s, s' \in S$ とすると、広義固有空間分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ が成立し、各 $V^\mu(s)$ は $\rho(s')$ 安定である。広義固有空間分解が成立することより、 $\rho(s)$ は三角化可能である。また、任意の $\mu \in \mathbb{K}$ に対して、 $\rho_\mu(s'') = \rho(s'')|_{V^\mu(s)}$ ($s'' \in S$) と書くと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} (\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s'))|_{V^\mu(s)} &= \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho_\mu(s))^n \rho_\mu(s') \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho_\mu(s) - \mu)^n \rho_\mu(s') \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\rho_\mu(s) - \mu)^{n-k} \rho_\mu(s') (-\mu)^k \end{aligned}$$

である。 $\rho_\mu(s) - \mu$ は冪零だから、 n が十分大きいとき、上式の最右辺は 0 となる。任意の $\mu \in \mathbb{K}$ に対してこれが成り立ち、 V が有限次元であることより $V^\mu(s) \neq 0$ となる $\mu \in \mathbb{K}$ は有限個だから、 n が十分大きいとき $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(s))^n \rho(s') = 0$ となる。

(b) $\implies$ (a) 条件 (b) が成り立つとする。まず、 $\lambda \in \mathbb{K}^S$ とすると、任意の $s \in S$ に対して $V^{\lambda(s)}(s)$ は $\rho(S)$ 安定だから (補題 1.11), $V^\lambda(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s)$ も $\rho(S)$ 安定である。

次に、直和分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ が成立することを示す。和 $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ が直和であることは、命題 1.7 ですでに示した。 $V = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} V^\lambda(S)$ であることを、次元 $\dim_{\mathbb{K}} V$ に関する帰納法で示す。次元がより小さい場合には主張が成り立つとする。ある $\lambda \in \mathbb{K}^S$ が存在して $V = V^\lambda(S)$ となるならば、主張は明らかである。そうでないとすると、ある $s \in S$ が存在して、直和分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ が非自明な (すなわち、0 でない直和因子が二つ以上存在する) ものとなる (任意の $s \in S$ に対して、仮定より $\rho(s)$ が三角化可能であり、したがって、広義固有空間分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{K}} V^\mu(s)$ が成立することを用いた)。仮定より、各 $V^\mu(s)$ は $\rho(S)$ 安定だから、帰納法の仮定より、 $V^\mu(s) = \sum_{\lambda \in \mathbb{K}^S} (V^\lambda(S) \cap V^\mu(s))$ が成り立つ。これで、帰納法が完成した。 $\square$

系 1.13 $\mathfrak{g}$ を代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする。このとき、直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ が成立する。

証明 係数体 $\mathbb{K}$ が代数閉であることより、 $\mathfrak{g}$ 上の任意の線型写像は三角化可能である。また、 $\mathfrak{h}$ が冪零であることより $\mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ がとれ、この p について、任意の $h, h' \in \mathfrak{h}$ に対して $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h))^p \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h') = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\mathfrak{h}}(h))^p h' = 0$ が成り立つ。よって、主張は、命題 1.12 から従う。 $\square$

命題 1.14 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする。このとき、ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ に対して、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p = 0$ が成り立つ。

証明 必要ならば係数拡大を考えることにより、一般性を失わず、係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する。このとき、系 1.13 より、直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^*} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ が成立する。 $\mathfrak{g}$ は有限次元だから、 $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{K}^* \mid \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0\}$ と置くと、 Δ は有限である。さらに、 $\mathbb{K}$ は標数 0 だから、 $p \in \mathbb{N}$ を任意の $\lambda \in \Delta \setminus \{0\}$ に対して $(\Delta + p\lambda) \cap \Delta = \emptyset$ を満たすようにとれる。 $\lambda \in \Delta \setminus \{0\}$ とするとき、任意の $\mu \in \Delta$ に対して $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}^{\mu+p\lambda}(\mathfrak{h}) = 0$ だから (系 1.9), $\mathfrak{g}$ の直和分解と合わせて $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}))^p = 0$ を得る。よって、この p が主張の条件を満たす。 $\square$

命題 1.15 $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数、 $\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とし、 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を不変な非退化双線型形式とする。このとき、任意の $\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して、 $B|_{\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$ は非退化である。

証明 必要ならば係数拡大を考えることにより、一般性を失わず、係数体 $\mathbb{K}$ は代数閉であると仮定する。このとき、系 1.13 より、直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^*} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ が成立する。 $\lambda \in \mathbb{K}^*$ とし、 $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$ を任意にとると、 B の非退化性より、ある $y \in \mathfrak{g}$ が存在して $B(x, y) \neq 0$ となる。一方で、任意の $\mu \in \mathbb{K}^* \setminus \{-\lambda\}$ に対して $B(\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h})) = 0$ だから (系 1.10), 必要ならば y をその $\mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ 成分に置き換えることで、 $y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ としてよい。以上より、 $B|_{\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$ は左非退化である。右非退化性も、同様に確かめられる。よって、 $B|_{\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})}$ は非退化である。 $\square$

1.3 Cartan 部分代数の存在

補題 1.16 $\mathfrak{g}$ を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$ をその部分 Lie 代数とする。 $a \in \mathfrak{h}$ が次の条件を満たすとする。

- (i) $\mathfrak{g}^0(a)$ は、 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で極小である。
- (ii) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(a)$ である。

このとき、 $\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ (すなわち、 $\mathfrak{g}^0(a)$ は $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で最小である)。

証明 条件 (i), (ii) が満たされるとして、 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^0(a)$ と置く。 $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり (系 1.9), 条件 (ii) より $\mathfrak{h}$ を含む。随伴表現が誘導する $\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ 上の表現を、それぞれ $\rho_{\mathfrak{m}}$ と $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}$ と書く。 $x \in \mathfrak{m}$ を任意にとり、 $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して、 $\rho_{\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$, $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$ の固有多項式をそれぞれ

$$\begin{aligned} p(T, \lambda) &= T^r + p_1(\lambda)T^{r-1} + \cdots + p_r(\lambda), \\ q(T, \lambda) &= T^{n-r} + q_1(\lambda)T^{n-r-1} + \cdots + q_{n-r}(\lambda) \end{aligned}$$

(ここで、 $n = \dim \mathfrak{g}$, $r = \dim \mathfrak{m}$ である) と書く。上式と $p(T, \lambda) = \det(T - \rho_{\mathfrak{m}}(a) - \lambda \rho_{\mathfrak{m}}(x))$ および $q(T, \lambda) = \det(T - \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a) - \lambda \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(x))$ を比較すれば、各 p_i と q_i がただか i 次の $\mathbb{K}$ 係数多項式であることがわかる。また、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(a + \lambda x)$ の固有多項式は、 $p(T, \lambda)q(T, \lambda)$ である。以下、 $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$p(T, \lambda) = T^r \iff \rho_{\mathfrak{m}}(a + \lambda x) \text{ は冪零} \iff \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}^0(a + \lambda x) \quad (*)$$

であることに注意する。

$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^0(a)$ だから、 $(*)$ より $p(T, 0) = T^r$ である。一方で、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(a)$ の固有多項式 $p(T, 0)q(T, 0)$ の根 0 の重複度は、対応する広義固有空間の次元 $\dim \mathfrak{m} = r$ に等しい。したがって、 $q(T, 0)$ は 0 を根にもたない。すなわち、 $q_{n-r}(0) \neq 0$ であり、特に、多項式 q_{n-r} は 0 ではない。このことと $\mathbb{K}$ が無限可換体であることよ

り, $q_{n-r}(\lambda) \neq 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{K}$ が無限個存在する. このような λ に対しては, $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(a + \lambda x)$ は可逆だから, $\mathfrak{g}^0(a + \lambda x) \subseteq \mathfrak{m}$ が成り立つ. 条件 (i) と合わせて, $\mathfrak{g}^0(a + \lambda x) = \mathfrak{m}$ を得るから, (*) より $p(T, \lambda) = T^r$ である. $p(T, \lambda) = T^r$ であるということは $p_1(\lambda) = \cdots = p_r(\lambda) = 0$ であるということにほかならず, $p_1, \dots, p_r$ は多項式だから, これが無限個の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して成り立つことより, すべての $\lambda \in \mathbb{K}$ に対しても成り立つ. したがって, (*) より, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}^0(a + \lambda x)$ である. よって,

$$\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{m} \subseteq \bigcap_{x \in \mathfrak{m}, \lambda \in \mathbb{K}} \mathfrak{g}^0(a + \lambda x) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$$

だから, $\mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ. □

定理 1.17 $\mathfrak{g}$ を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である.
- (b) $\mathfrak{h}$ は, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$ に属し, かつこの中で極小である.
- (c) $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ である.

証明 (a) $\implies$ (b) $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるとする. 任意の $x \in \mathfrak{h}$ に対して, $\mathfrak{h}$ が冪零であることより $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(x)$ は冪零だから, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(x)$ である. そこで, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で極小なもの $\mathfrak{g}^0(a)$ ($a \in \mathfrak{h}$) をとると (次元が最小のものをとればよい), 補題 1.16 より, 任意の $x \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathfrak{g}^0(a) \subseteq \mathfrak{g}^0(x)$ である.

$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$ であることを示す. $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}^0(a)$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり (系 1.9), $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0(a)$ だから, 随伴表現は $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}^0(a)/\mathfrak{h}$ 上の表現を誘導する. この表現を ρ と書くと, 任意の $x \in \mathfrak{h}$ に対して, $\mathfrak{g}^0(a) \subseteq \mathfrak{g}^0(x)$ であることより, $\rho(x)$ は冪零である. したがって, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}^0(a)$ であると仮定すると, Engel の定理より, $\mathfrak{g}^0(a)/\mathfrak{h}$ の 0 でない元であって $\rho(\mathfrak{h})$ によって零化されるものが存在する. すなわち, $y \in \mathfrak{g}^0(a) \setminus \mathfrak{h}$ であって $[\mathfrak{h}, y] \subseteq \mathfrak{h}$ を満たすものが存在する. ところが, これは $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ であることに反するから, 背理法より, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$ である.

$\mathfrak{h}$ が $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$ の中で極小であることを示す. $x \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}^0(x) \subseteq \mathfrak{h}$ を満たすすると, $x \in \mathfrak{g}^0(x) \subseteq \mathfrak{h}$ だから, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$ が $(\mathfrak{g}^0(y))_{y \in \mathfrak{h}}$ の中で最小であることより, $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{h}$ である. よって, $\mathfrak{h}$ は $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$ の中で極小である.

(b) $\implies$ (c) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a)$ ($a \in \mathfrak{g}$) が $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$ の中で極小であるとする. すると, $a \in \mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{h}$ であり, 仮定より特に $\mathfrak{g}^0(a)$ は $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で極小だから, 補題 1.16 より, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(a) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ.

(c) $\implies$ (a) $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ であるとする. このとき, $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ の任意の元は冪零だから, $\mathfrak{h}$ は冪零である (参照). また, $\mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$ を満たす $p \in \mathbb{N}$ をとると

$$\text{ad}(\mathfrak{h})^{p+1} \mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \text{ad}(\mathfrak{h})^p \mathfrak{h} = \mathcal{C}^p(\mathfrak{h}) = 0$$

となるから, $\mathbf{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ である. よって, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である. □

系 1.18 (Cartan 部分代数の存在) 無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は, Cartan 部分代数をもつ.

証明 定理 1.17 より, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{h}}$ の中で極小なものをとれば (次元が最小のものをとればよい), それが $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である. □

1.4 多項式写像に関する準備

本小節では、有限次元ベクトル空間 V に対して、 V 上の多項式関数全体のなす単位的結合 $\mathbb{K}$ 代数を、 $\text{Pol}(V)$ と書く。係数体 $\mathbb{K}$ が無限可換体である場合、これは、双対空間の対称代数 $\mathbf{S}(V^*)$ に自然に同型である。

V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、 $\phi: V \rightarrow W$ を多項式写像（すなわち、任意の $g \in W^*$ に対して $g \circ \phi \in \text{Pol}(V)$ であるような写像）とすると、多項式写像 $\phi: V \rightarrow W$ による引き戻しが単位的 $\mathbb{K}$ 代数の準同型 $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$ を定めることに注意する。

定義 1.19 (支配的な多項式写像) V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。多項式写像 $\phi: V \rightarrow W$ が**支配的** (dominant) であるとは、 ϕ による引き戻し $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$ が単射であることをいう。

V を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。 V の部分集合であって V 上の多項式関数の族の共通零点集合として書けるものの全体は、閉集合系の公理を満たす。これによって定まる位相を、 V の **Zariski 位相** (Zariski topology) という。Zariski 位相を考えていることを明示する意味で、「Zariski 閉集合」、「Zariski 開集合」、「Zariski 稠密集合」などという。容易に確かめられるように、 $\text{Pol}(V)$ は整域であり、このことから、 V の任意の空でない Zariski 開集合が V において Zariski 稠密であることが従う。

本小節の以下の部分では、可換環 A から B への環準同型全体のなす空間を、 $\text{Hom}(A, B)$ と書く。また、可換環 A の $S \subseteq A$ による局所化を $S^{-1}A$ と書き、 $S = \{s\}$ である場合にはこれを $A[s^{-1}]$ とも書く。

補題 1.20 V を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。 $v \in V$ に対して、 $\text{ev}_v \in \text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$ を、 $\text{ev}_v(f) = f(v)$ によって定める。このとき、写像 $v \mapsto \text{ev}_v$ は、 V から $\text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$ への線型同型写像である。

証明 $\text{Pol}(V)$ は双対空間の対称代数 $\mathbf{S}(V^*)$ に自然に同型だから、 V^* の基底 $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ を一つ固定すると、 $\text{Pol}(V)$ から $\mathbb{K}$ への環準同型は、 $\phi_1, \dots, \phi_n$ の行き先を決めるごとに一意に定まる。一方で、 V の元も、 $\phi_1, \dots, \phi_n$ の値を決めるごとに一意に定まる。よって、写像 $v \mapsto \text{ev}_v$ は、 V から $\text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$ への線型同型写像である。 $\square$

補題 1.21 A と B を整域とし、 A は B に部分環として含まれ、 B は単位的 A 代数として有限生成であるとする。このとき、ある $a \in A \setminus \{0\}$ と A 上代数的独立な $x_1, \dots, x_n \in B$ が存在して、 $B[a^{-1}]$ が $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$ 上整となる。

証明 $S = A \setminus \{0\}$ と置き、分数体 $\text{Frac}(A) = S^{-1}A$ と局所化 $S^{-1}B$ を考える。Noether の正規化補題 [1, Chapter 5, Exercise 16] より、 $\text{Frac}(A)$ 上代数的独立な $x_1, \dots, x_n \in S^{-1}B$ が存在して、 $S^{-1}B$ が $\text{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$ 上整となる。必要ならば分母を払うことで、 $x_1, \dots, x_n \in B$ としてよい。

任意の $y \in B$ に対して、ある $s \in S$ が存在して、 sy が $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整となることを示す。 y は $(S^{-1}B)$ の元とみなすと $\text{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$ 上整だから、ある $d \in \mathbb{N}$ と $p_i(x_1, \dots, x_n) \in \text{Frac}(A)[x_1, \dots, x_n]$ ($i \in \{0, \dots, d-1\}$) が存在して、

$$y^d + p_{d-1}(x_1, \dots, x_n)y^{d-1} + \dots + p_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

を満たす。上式で分母を払うことで、ある $s \in S$ と $q_i(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots, x_n]$ ($i \in \{0, \dots, d-1\}$) が存

在して,

$$(sy)^d + p_{d-1}(x_1, \dots, x_n)(sy)^{d-1} + \dots + p_0(x_1, \dots, x_n) = 0$$

を満たすことがわかる. よって, sy は $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整である.

B の単位的 A 代数としての有限生成系 $y_1, \dots, y_m$ をとる. 前段の結果より, 各 j に対して, $s_j \in S$ を $s_j y_j$ が $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整となるようにとれる. $a = s_1 \cdots s_m \in S$ と置けば, 任意の j に対して ay_j は $A[x_1, \dots, x_n]$ 上整である. $B[a^{-1}]$ は単位的 $A[a^{-1}]$ 代数として $ay_1, \dots, ay_m$ によって生成されるから, このことより, $B[a^{-1}]$ は $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$ 上整である. $\square$

補題 1.22 A と B を整域とし, A は B に部分環として含まれ, B は単位的 A 代数としての有限生成であるとする. このとき, 任意の $b \in B \setminus \{0\}$ に対して, ある $a \in A \setminus \{0\}$ が存在して, 任意の代数閉体 $\mathbb{K}$ と, 任意の $\tau \in \text{Hom}(A, \mathbb{K})$ であって $\tau(a) \neq 0$ を満たすものに対して, τ を拡張する $\tilde{\tau} \in \text{Hom}(B, \mathbb{K})$ であって $\tilde{\tau}(b) \neq 0$ を満たすものが存在する.

証明 $b \in B \setminus \{0\}$ とすると, 局所化 $B[b^{-1}]$ も整域であり, A を部分環として含み, 単位的 A 代数としての有限生成である. したがって, 補題 1.21 より, ある $a \in A \setminus \{0\}$ と A 上代数的独立な $x_1, \dots, x_n \in B[b^{-1}]$ が存在して, $B[b^{-1}, a^{-1}]$ が $A[x_1, \dots, x_n][a^{-1}]$ 上整となる. $\mathbb{K}$ を代数閉体とし, $\tau \in \text{Hom}(A, \mathbb{K})$ が $\tau(a) \neq 0$ を満たすとする. τ は $\tau' \in \text{Hom}(A[a^{-1}], \mathbb{K})$ に一意に拡張される. さらに, $x_1, \dots, x_n$ は A 上代数的独立であり, したがって $A[a^{-1}]$ 上代数的独立でもあるから, τ' を拡張する $\tau'' \in \text{Hom}(A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n], \mathbb{K})$ が存在する. $B[a^{-1}, b^{-1}]$ は $A[a^{-1}][x_1, \dots, x_n]$ 上整だから, 上昇定理の系 [1, Chapter 5, Exercise 2] より, τ'' を拡張する $\tau''' \in \text{Hom}(B[a^{-1}, b^{-1}], \mathbb{K})$ が存在する. $\tilde{\tau} = \tau'''|_B \in \text{Hom}(B, \mathbb{K})$ が主張の条件を満たす環準同型となる. $\square$

命題 1.23 V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. 多項式写像 $\phi: V \rightarrow W$ に対する次の条件について, (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) が成り立つ. さらに, $\mathbb{K}$ が代数閉ならば, これらの条件は同値である.

- (a) ϕ は支配的である.
- (b) $\phi(V)$ は W において Zariski 稠密である.
- (c) V の任意の Zariski 稠密開集合の ϕ による像は, W のある Zariski 稠密開集合を含む.

証明 (a) $\iff$ (b) 次のとおり, 主張の同値性が成り立つ.

$$\begin{aligned} \phi \text{ が支配的でない} &\iff \text{ある } g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\} \text{ が存在して, } g \circ \phi = 0 \\ &\iff \text{ある } g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\} \text{ が存在して, } \phi(V) \subseteq g^{-1}(\{0\}) \\ &\iff W \text{ の真の Zariski 閉集合であって } \phi(V) \text{ を含むものが存在する} \\ &\iff \phi(V) \text{ が } W \text{ において Zariski 稠密でない.} \end{aligned}$$

(c) $\implies$ (b) 明らかである.

(a) $\implies$ (c) ($\mathbb{K}$ が代数閉である場合) ϕ が支配的であるとする. すると, ϕ による引き戻し $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$ は単射環準同型だから, これによって $\text{Pol}(W)$ を $\text{Pol}(V)$ の部分環とみなして補題 1.22 を適用することで, 次を得る.

任意の $f \in \text{Pol}(V) \setminus \{0\}$ に対して, ある $g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\}$ が存在して, $\tau \in \text{Hom}(\text{Pol}(W), \mathbb{K})$ であって $\tau(g) \neq 0$ を満たす任意のものに対して, $\tilde{\tau} \in \text{Hom}(\text{Pol}(V), \mathbb{K})$ であって $\tilde{\tau} \circ \phi^* = \tau$ かつ $\tilde{\tau}(f) \neq 0$ を満たすものが存在する.

補題 1.20 に注意すれば、これは、次のように書き換えられる。

任意の $f \in \text{Pol}(V) \setminus \{0\}$ に対して、ある $g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\}$ が存在して、 $w \in W$ であって $g(w) \neq 0$ を満たす任意のものに対して、 $v \in \phi^{-1}(\{w\})$ であって $f(v) \neq 0$ を満たすものが存在する。

この命題の「 $w \in W$ であって」以下の部分は、 $\phi(\{f \neq 0\}) \supseteq \{g \neq 0\}$ であることを意味する。よって、 V の任意の Zariski 稠密開集合の ϕ による像は、 W のある Zariski 稠密開集合を含む。□

V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間、 $\phi: V \rightarrow W$ を多項式写像とし、 $x_0 \in V$ とする。 $\phi(x_0 + h)$ を $h \in V$ に関して次数ごとに整理して

$$\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + \delta_1(h) + \cdots + \delta_n(h) \quad (\delta_i: V \rightarrow W \text{ は斉 } i \text{ 次多項式写像})$$

と表すときの線型写像 $\delta_1: V \rightarrow W$ を、 ϕ の点 x_0 における**微分** (derivative) といい、 $\phi'(x_0)$ と書く。

命題 1.24 V と W を無限可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。多項式写像 $\phi: V \rightarrow W$ のある点 $x_0 \in V$ における微分 $\phi'(x_0): V \rightarrow W$ が全射ならば、 ϕ は支配的である。

証明 一般性を失わず、 $\phi(0) = 0$ であり、 $\phi'(0): V \rightarrow W$ が全射であるとする。すなわち、 ϕ は全射線型写像 $\phi'(0)$ と 2 次以上の項のみからなる多項式写像との和であるとする。 $g \in \text{Pol}(W) \setminus \{0\}$ とし、 g の斉 i 次部分を g_i と書き、 $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid g_i \neq 0\}$ と置く。すると、 $g \circ \phi$ は斉 n 次多項式関数 $g_n \circ \phi'(0)$ と $n+1$ 次以上の項のみからなる多項式関数との和となり、 $\phi'(0)$ は全射であり $g_n \neq 0$ だから、 $g \circ \phi \neq 0$ を得る。よって、 ϕ による引き戻し $\phi^*: \text{Pol}(W) \rightarrow \text{Pol}(V)$ は単射だから、 ϕ は支配的である。□

1.5 Cartan 部分代数の共役性

V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。線型写像 $T: V \rightarrow V$ が**局所冪零** (locally nilpotent) であるとは、任意の $v \in V$ に対して、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、 $T^n(v) = 0$ を満たすことをいう。 V が有限次元である場合には、 T が冪零であることと局所冪零であることは同値である。

V 上の局所冪零な線型写像 T に対して、 V 上の線型写像 e^T を、

$$e^T(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n(v)$$

(右辺は有限項を除き 0 である) と定める^{*1}。容易に確かめられるように、 T と S が互いに可換な V 上の局所冪零な線型写像ならば、 $e^{T+S} = e^T e^S = e^S e^T$ が成り立つ。特に、 e^T は、 e^{-T} を逆にもつ V の自己線型同型である。また、 A が結合的とは限らない代数であり、 D がその上の局所冪零な導分ならば、 e^D は結合的とは限らない代数 A の自己同型である。

定義 1.25 (初等自己同型) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする。 $\text{ad}(x)$ が冪零であるような $x \in \mathfrak{g}$ に対する自己同型 $e^{\text{ad}(x)}$ の全体が生成する $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ の部分群を、 $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ と書く。 $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ の元を、 $\mathfrak{g}$ の**初等自己同型** (elementary automorphism) という。

^{*1} 本小節の範囲では、 V が有限次元である (したがって、 T が冪零である) 場合だけで十分である。一般の場合の定義は、3 節や 4 節で用いられる。

$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする. このとき, $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$, $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ とすると, $\text{ad}(x)$ は冪零だから (命題 1.14), $e^{\text{ad}(x)} \in \text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ が定まる. 本小節の以下の部分では, この形の初等自己同型全体が生成する $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ の部分群を, $E(\mathfrak{h})$ と書くことにする.

補題 1.26 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする. $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ であって $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \neq 0$ を満たすもの ($\mathfrak{g}$ が有限次元であることと命題 1.7 より, このような λ は有限個である) を重複なく列挙して, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする.

(1) $\mathfrak{h}_{\text{reg}} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})\}$ と置くと, $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ は $\mathfrak{h}$ の Zariski 稠密開集合である.

(2) 写像 $\phi: \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \dots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{g}$ を

$$\phi(h, x_1, \dots, x_n) = e^{\text{ad}(x_1)} \dots e^{\text{ad}(x_n)}(h)$$

と定めると, これは支配的な多項式写像である.

証明 (1) $h \in \mathfrak{g}$ とする. 直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$ が成立するから (系 1.13),

$$\mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i(h)=0} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$$

である. したがって, $\mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ であるための必要十分条件は, $\lambda_1(h), \dots, \lambda_n(h)$ がいずれも 0 でないことである. よって, $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ は, $\mathfrak{h}$ 上の多項式関数 $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$ の非零点集合だから, $\mathfrak{h}$ の Zariski 稠密開集合である.

(2) $p \in \mathbb{N}$ を任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h}))^p = 0$ を満たすようにとると (命題 1.14), 写像 ϕ は

$$\phi(h, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{p-1} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \text{ad}(x_1)^{k_1} \dots \text{ad}(x_n)^{k_n}(h)$$

と書けるから, これは多項式写像である. 次に, ϕ が支配的であることを示すために, $h \in \mathfrak{h}$ を固定して, 微分 $\phi'(h, 0, \dots, 0)$ を求める. $\phi(h+u, 0, \dots, 0) = h+u$ ($u \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$) より

$$\phi'(h, 0, \dots, 0)(u, 0, \dots, 0) = u$$

であり, $\phi(h, 0, \dots, v_i, \dots, 0) = h + [v_i, h] + \sum_{k=2}^{p-1} \text{ad}(v_i)^k(h)$ ($v_i \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$) より

$$\phi'(h, 0, \dots, 0)(0, 0, \dots, v_i, \dots, 0) = [v_i, h]$$

である. したがって, 微分 $\phi'(h, 0, \dots, 0): \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \dots \times \mathfrak{g}^{\lambda_n}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{g}$ は,

$$\phi'(h, 0, \dots, 0)(u, v_1, \dots, v_n) = u + [v_1, h] + \dots + [v_n, h]$$

で与えられる. ここで, $h \in \mathfrak{h}$ を $\lambda_1(h), \dots, \lambda_n(h)$ がいずれも 0 でないようにとっておけば, $\text{ad}(h)$ は各 $\mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$ 上で線型同型となるから, 上式より, $\phi'(h, 0, \dots, 0)$ の像は $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) + \sum_{i=1}^n \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ (系 1.13) となる. よって, 命題 1.24 より, ϕ は支配的である. $\square$

補題 1.27 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とし, $\mathfrak{h}_1$ と $\mathfrak{h}_2$ をその Cartan 部分代数とする. このとき, $\phi_1 \in E(\mathfrak{h}_1)$ と $\phi_2 \in E(\mathfrak{h}_2)$ であって, $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ を満たすものが存在する.

証明 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して, 定理 1.17 より $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_i$ であることに注意して,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{i,\text{reg}} &= \{h \in \mathfrak{h}_i \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_i)\} \\ &= \{h \in \mathfrak{h}_i \mid \mathfrak{g}^0(h) = \mathfrak{h}_i\}\end{aligned}$$

と置く. すると, 補題 1.26 と命題 1.23 より, $E(\mathfrak{h}_i)\mathfrak{h}_{i,\text{reg}}$ は $\mathfrak{g}$ のある Zariski 稠密開集合を含む. 特に, $E(\mathfrak{h}_1)\mathfrak{h}_{1,\text{reg}} \cap E(\mathfrak{h}_2)\mathfrak{h}_{2,\text{reg}} \neq \emptyset$ である. すなわち, 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して $\phi_i \in E(\mathfrak{h}_i)$ と $h_i \in \mathfrak{h}_{i,\text{reg}}$ をとって, $\phi_1(h_1) = \phi_2(h_2)$ となるようにできる. 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して

$$\phi_i(\mathfrak{h}_i) = \phi_i(\mathfrak{g}^0(h_i)) = \mathfrak{g}^0(\phi_i(h_i))$$

だから, $\phi_1(h_1) = \phi_2(h_2)$ より $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ である. □

定理 1.28 (Cartan 部分代数の共役性) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする.

- (1) $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ の部分群 $E(\mathfrak{h})$ は, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ (系 1.18 より存在する) のとり方によらない. これを E と書くと, E は $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群である.
- (2) $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は, すべて E ((1) の記号) の下で共役である.

証明 (1) $\mathfrak{h}_1$ と $\mathfrak{h}_2$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると, 補題 1.27 より, $\phi_1 \in E(\mathfrak{h}_1)$ と $\phi_2 \in E(\mathfrak{h}_2)$ を $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ となるようにとれる. 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して

$$E(\mathfrak{h}_i) = \phi_i E(\mathfrak{h}_i) \phi_i^{-1} = E(\phi_i(\mathfrak{h}_i))$$

だから, $\phi_1(\mathfrak{h}_1) = \phi_2(\mathfrak{h}_2)$ より $E(\mathfrak{h}_1) = E(\mathfrak{h}_2)$ である.

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とし, $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ とすると, $\phi(\mathfrak{h})$ も $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数だから,

$$\phi E \phi^{-1} = \phi E(\mathfrak{h}) \phi^{-1} = E(\phi(\mathfrak{h})) = E$$

が成り立つ. よって, E は $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ の正規部分群である.

- (2) (1) の証明の前段の状況で, $\phi_2^{-1}\phi_1 \in E$ は, $\mathfrak{h}_1$ を $\mathfrak{h}_2$ に移す. □

系 1.29 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は, すべて等しい次元をもつ.

証明 $\overline{\mathbb{K}}$ を $\mathbb{K}$ の代数閉包とする. $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると, それらの係数拡大 $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ と $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の Cartan 部分代数だから (命題 1.6), Cartan 部分代数の共役性 (定理 1.28) より, $\dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})} = \dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ である. よって, $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}'$ である. □

定義 1.30 (階数) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の次元 (系 1.18 と系 1.29 より, これは一意に定まる) を, $\mathfrak{g}$ の **階数** (rank) という.

系 1.31 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする.

- (1) $\mathfrak{g}$ の階数は, $x \in \mathfrak{g}$ に対する部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}^0(x)$ の次元の最小値に等しい.
- (2) $x \in \mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}^0(x)$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, $\mathfrak{g}^0(x)$ の次元が $\mathfrak{g}$ の階数に等しいことである.
- (3) $\mathfrak{g}$ の任意の Cartan 部分代数は, (2) の方法で得られる.

証明 定理 1.17 で示したように, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の族 $(\mathfrak{g}^0(x))_{x \in \mathfrak{g}}$ に属し, かつこの中で極小であることである. このことと階数の定義から, 主張が従う. $\square$

1.6 簡約 Lie 代数の Cartan 部分代数

命題 1.32 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である.
- (b) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ が存在して, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ と書ける.

証明 簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は, 半単純 Lie 代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に (Lie 代数として) 直和分解される (参照). よって, 主張は, 命題 1.5 から従う. $\square$

補題 1.33 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は, 可換である.

証明 $\mathfrak{g}$ の随伴表現の $\mathfrak{h}$ への制限を $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ と置くと, ρ のトレース形式は, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B の制限 $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ にほかならない. 半単純性に関する Cartan の判定法より B は非退化だから, $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})}$ も非退化である (定理 1.17, 命題 1.15). したがって, $\mathfrak{h}$ は簡約である (参照). 一方で, $\mathfrak{h}$ は冪零でもあるから, $\mathfrak{h}$ は可換である. $\square$

補題 1.34 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とし, $\mathfrak{h}$ をその冪零部分 Lie 代数とする. このとき, 任意の $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ に対して, その $\mathfrak{g}$ における半単純部分 x_s と冪零部分 x_n は, ともに $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ に属する. 特に, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると, 任意の $x \in \mathfrak{h}$ に対して, その $\mathfrak{g}$ における半単純部分 x_s と冪零部分 x_n は, ともに $\mathfrak{h}$ に属する.

証明 $x, y \in \mathfrak{g}$ として, y の半単純部分を y_s と書くと,

$$x \in \mathfrak{g}^0(y) \iff x \in \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(y_s) \iff [x, y_s] = 0$$

である. 上式において, x をその半単純部分 x_s に置き換えても, 同じ同値性が成り立つ. $\text{ad}(x_s)$ は $\text{ad}(x)$ の線型写像としての半単純部分だから, Jordan 分解に関する一般論より, $\text{ad}(x_s)$ は $\text{ad}(x)$ の定数項をもたない多項式として表せる. したがって, $[x, y_s] = 0$ ならば $[x_s, y_s] = 0$ である. 上記の同値性と合わせて, $x \in \mathfrak{g}^0(y)$ ならば $x_s \in \mathfrak{g}^0(y)$ であることを得る. よって, x が $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \bigcap_{y \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}^0(y)$ に属するならば, x_s と $x_n = x - x_s$ も $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ に属する.

$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数ならば, $\mathfrak{h}$ は冪零であり, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ が成り立つ (定理 1.17). よって, 後半の主張は, 前半の主張から従う. $\square$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が ($\mathfrak{g}$ において) **極大可換** (maximally commutative) であるとは, $\mathfrak{h}$ が可換であり, かつ $\mathfrak{g}$ の可換な部分ベクトル空間であって $\mathfrak{h}$ を真に含むものが存在しないことをいう. 容易に確かめられるように, これが成り立つための必要十分条件は, $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ であることである.

定理 1.35 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である.
 (b) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ において極大可換であり, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元は半単純である.

証明 定理 1.17 ですでに示したように, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ であることである. また, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が半単純ならば, その同時固有値 0 の同時広義固有空間 $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ は, 同時固有値 0 の同時固有空間, すなわち $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に等しい. よって, 主張を示すためには, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるとして, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が半単純であることを示せばよい.

命題 1.32 より, 一般性を失わず, $\mathfrak{g}$ は半単純であると仮定する. $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数であるとして, $x \in \mathfrak{h}$ を任意にとり, その Jordan 分解を (x_s, x_n) と書く. すると, $x_n \in \mathfrak{h}$ であり (補題 1.34), $\mathfrak{h}$ は可換だから (補題 1.33), $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ は $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元と可換である. さらに, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ は冪零だから, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ の任意の元も冪零である. したがって, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を B と書くと,

$$B(\mathfrak{h}, x_n) = \text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)) = 0$$

である. $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})}$ は非退化だから (定理 1.17, 命題 1.15), 上式より, $x_n = 0$ を得る. よって, $x = x_s$ であり, x は半単純である. すなわち, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ は半単純である. $\square$

2 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

Lie 代数

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{K}) \mid \text{tr}(x) = 0\}$$

を考え,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置くと, (H, X, Y) は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の基底である. これを, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の**標準基底** (standard basis) という. これらの元 H, X, Y は, 関係式

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たす.

本節では, 特に断らなくても, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を記号 (H, X, Y) で表す.

2.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群のウェイト

定義 2.1 (ウェイト) V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とする. $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の V への作用の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を, それぞれ, V の**ウェイト** (weight), **ウェイトベクトル** (weight vector), **ウェイト空間** (weight space) という. H の V への作用における固有値 $\lambda \in \mathbb{K}$ の重複度を, V におけるウェイト λ の**重複度** (multiplicity) という.

定義 2.2 (ウェイト加群) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V は, それがウェイト空間の直和に分解される (すなわち, $H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の V への作用が対角化可能である) とき, **ウェイト加群** (weight module) であるという.

命題 2.3 V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とする. $v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルならば, Xv はウェイト $\lambda + 2$ のウェイトベクトルであり, Yv はウェイト $\lambda - 2$ のウェイトベクトルである.

証明 $v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルであるとする、 $Hv = \lambda v$ だから、

$$\begin{aligned} HXv &= XHv + [H, X]v = \lambda Xv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv, \\ HYv &= YHv + [H, Y]v = \lambda Yv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv \end{aligned}$$

である。すなわち、 Xv はウェイト $\lambda + 2$ のウェイトベクトルであり、 Yv はウェイト $\lambda - 2$ のウェイトベクトルである。 $\square$

命題 2.4 $f: V \rightarrow W$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の間の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 準同型とする。 $v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルならば、 $f(v) \in W$ はウェイト λ のウェイトベクトルである。

証明 $v \in V$ がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイトベクトルであるとする、 $Hv = \lambda v$ だから、

$$Hf(v) = f(Hv) = \lambda f(v)$$

である。すなわち、 $f(v)$ はウェイト λ のウェイトベクトルである。 $\square$

2.2 最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群

定義 2.5 (極大ベクトル) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V のウェイトベクトル $e \neq 0$ であって $Xe = 0$ を満たすものを、 V の**極大ベクトル** (maximal vector) という。 V の極大ベクトルであって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群として生成するものを、 V の**極大生成ベクトル** (maximal generating vector) という。

定義 2.6 (最高ウェイト加群) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V がウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の極大生成ベクトルをもつとき、 V は**最高ウェイト λ の最高ウェイト加群** (highest weight module of highest weight λ) であるという。

命題 2.7 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする。 V をウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の極大ベクトル e をもつ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とし、 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$e_n = \frac{1}{n!} Y^n e$$

と定める。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$He_n = (\lambda - 2n)e_n, \quad Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \quad Ye_n = (n + 1)e_{n+1}$$

が成り立つ。ただし、 $e_{-1} = 0$ とみなす。

以下では、さらに、 e が V の極大生成ベクトルである（したがって、 V は最高ウェイト λ の最高ウェイト加群である）とする。

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n \neq 0$ であるとする。このとき、 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は V の基底である。

(3) ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n = 0$ であるとして、 $m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \neq 0\}$ と置く。このとき、 $(e_0, \dots, e_m)$ は V の基底であり、 $\lambda = m$ である。

証明 (1) H の作用に関する主張は命題 2.3 から従い、 Y の作用に関する主張は e_n の定義から明らかである。 X の作用に関する主張を、 $n \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す。 $n = 0$ のとき、 $e_0 = e$ は極大ベクトルだから

$Xe_0 = 0$ である. $n \geq 1$ とし, $Xe_{n-1} = (\lambda - n + 2)e_{n-2}$ が成り立つとすると,

$$\begin{aligned} nXe_n &= XYe_{n-1} \\ &= YXe_{n-1} + [X, Y]e_{n-1} \\ &= Y(\lambda - n + 2)e_{n-2} + He_{n-1} \\ &= (n-1)(\lambda - n + 2)e_{n-1} + (\lambda - 2n + 2)e_{n-1} \\ &= n(\lambda - n + 1)e_{n-1} \end{aligned}$$

となり, $Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}$ が成り立つ. これで, 帰納法が完成した.

(2) (1) より, $\text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は V の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群である. $e_0 = e$ は V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群として生成するから, $V = \text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ である. また, 仮定より e_n はいずれも 0 でなく, (1) よりすべて異なるウェイトのウェイトベクトルだから, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は線型独立である. よって, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は V の基底である.

(3) $(e_0, \dots, e_m)$ が V の基底であることは, (2) と同様にして示せる. また, $e_m \neq 0$ かつ $e_m = 0$ であり, 一方で (1) より $Xe_{m+1} = (\lambda - m)e_m$ だから, $\lambda = m$ が成り立つ. $\square$

最高ウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は, もし存在すれば, その構造は命題 2.7 によって決まってしまう. 分類を完成させるために, 与えられた最高ウェイトの最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群を具体的に構成する.

$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して, ベクトル空間としては $M(\lambda) = \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}}$ と定め (その標準基底を $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と書く), $H, X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $M(\lambda)$ への線型作用を

$$He_n = (\lambda - 2n)e_n, \quad Xe_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}, \quad Ye_n = (n + 1)e_{n+1}$$

によって定める (ただし, $e_{-1} = 0$ とみなす). これらの作用を標準基底 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に関して行列表示すれば,

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda - 2 & & \\ & & \lambda - 4 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & \\ & 0 & \lambda - 1 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる. 容易に確かめられるように, これらの作用によって, $M(\lambda)$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群をなす. 明らかに, e_0 は $M(\lambda)$ のウェイト λ の極大生成ベクトルである.

さらに, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする. このとき, $M(\lambda)$ において $Xe_{\lambda+1} = (\lambda - (\lambda + 1) + 1)e_\lambda = 0$ だから,

$$N(\lambda) = \text{span}\{e_{\lambda+1}, e_{\lambda+2}, \dots\}$$

と定めると, これは $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群である. これを用いて

$$L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$$

と定め, $M(\lambda)$ から $N(\lambda)$ への等化準同型による各 e_n の像をそのまま e_n と書く. 明らかに, $L(\lambda)$ は $(e_0, \dots, e_\lambda)$ を基底にもつ $\lambda + 1$ 次元の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群であり, e_0 は $L(\lambda)$ のウェイト λ の極大生成ベクトルである. $H, X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $L(\lambda)$ への作用を基底 $(e_0, \dots, e_\lambda)$ に関して行列表示すれば,

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda - 2 & & & \\ & & \lambda - 4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ & 0 & \lambda - 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

定理 2.8 (最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類) $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする。 $\lambda \in \mathbb{K}$ とする。

- (1) $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする。このとき、最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は、同型を除いて $M(\lambda)$ のみである。 $M(\lambda)$ は無限次元かつ既約なウェイト加群であり、そのウェイトは $\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots$ (すべて重複度 1) である。
- (2) $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする。このとき、最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は、同型を除いて $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ のみである。 $M(\lambda)$ は無限次元かつ可約なウェイト加群であり、そのウェイトは $\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots$ (すべて重複度 1) である。 $L(\lambda)$ は $\lambda + 1$ 次元かつ既約なウェイト加群であり、そのウェイトは $\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots, -\lambda$ (すべて重複度 1) である。

証明 最高ウェイト加群の分類に関する主張は、命題 2.7 から従う。次元とウェイトに関する主張は、明らかである。

既約性に関する主張を示す。まず、 $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとする、 $M(\lambda)$ は、部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $N(\lambda) \neq 0$, $M(\lambda)$ をもつから、可約である。次に、 $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるとして、 $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $N \neq 0$ を任意にとる。 $v \in M \setminus \{0\}$ を一つ固定して $v = \sum_{n=0}^m c_n e_n$ ($c_n \in \mathbb{K}$, $c_m \neq 0$) と表すと、命題 2.7 より

$$X^m v = \sum_{n=0}^m c_n X^m e_n = c_m (\lambda - p + 1)(\lambda - p + 2) \cdots \lambda e_0$$

である。これは、 $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ より e_0 の 0 でないスカラー倍であり、 N に属する。 e_0 は $M(\lambda)$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群として生成するから、 $N = M(\lambda)$ となる。よって、 $M(\lambda)$ は既約である。 $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である場合に $L(\lambda)$ が既約であることも、同様に示せる。 $\square$

系 2.9 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする。 V をウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の極大ベクトル e をもつ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とし、 e が生成する V の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ を M と置く。 M が有限次元ならば、 $\lambda = \dim M - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である。

証明 e は M の極大生成ベクトルだから、主張は、最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類 (定理 2.8) から従う。 $\square$

2.3 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群

補題 2.10 A を単位的結合代数とする*2。

- (1) $h, x \in A$ が $[h, x] = 2x$ を満たすならば、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $[h, x^n] = 2nx^n$ が成り立つ。
- (2) $h, x, y \in A$ が $[h, x] = 2x$ かつ $[x, y] = h$ を満たすならば、任意の $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して、 $[x^n, y] = nx^{n-1}(h + n - 1) = n(h - n + 1)x^{n-1}$ が成り立つ。

証明 (1) $[h, x] = 2x$ だから、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$[h, x^n] = \sum_{i=0}^{n-1} x^i [h, x] x^{n-1-i} = 2nx^n$$

*2 本小節の範囲では、 $A = \mathbf{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$ であり、下記の h, x, y がそれぞれ H, X, Y である場合だけで十分である。一般の場合の主張は、補題 3.21 の証明で用いられる (この補題は、存在定理 (定理 3.22) の証明で用いられる)。

である.

(2) $[x, y] = h$ であることと (1) より, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して,

$$\begin{aligned}
[x^n, y] &= \sum_{i=1}^{n-1} x^i [x, y] x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i h x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i (x^{n-1-i} h + [h, x^{n-1-i}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^i (x^{n-1-i} h + 2(n-1-i)x^{n-1-i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x^{n-1} (h + 2(n-1-i)) \\
&= nx^{n-1} (h + n - 1)
\end{aligned}$$

である. また, (1) より $[h, x^{n-1}] = 2(n-1)x^{n-1}$ だから,

$$\begin{aligned}
nx^{n-1}(h + n - 1) &= n(h + n - 1)x^{n-1} - [h, x^{n-1}] \\
&= n(h + n - 1)x^{n-1} - 2(n-1)x^{n-1} \\
&= n(h - n + 1)x^{n-1}
\end{aligned}$$

である. □

命題 2.11 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする. 0 でない有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V は, 極大ベクトルをもつ.

証明 $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}^2$ 上の線型写像として冪零だから, その V への作用も冪零である (参照). そこで, $X^n \in \mathbf{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$ の V への作用が 0 になるような最小の $n \in \mathbb{N}$ をとる. $V \neq 0$ だから, $n \geq 1$ である. $X^{n-1}v \neq 0$ を満たす $v \in V$ をとり, $e = X^{n-1}v$ と置く. すると, $e \neq 0$ かつ $Xe = 0$ である. また,

$$n(H - n + 1)e = n(H - n + 1)X^{n-1}v = [X^n, Y]v = 0$$

(第 2 の等号は補題 2.10 (2) から, 第 3 の等号は X^n の V への作用が 0 であることから従う) だから, $He = (n-1)e$ である. よって, e は V の極大ベクトルである. □

定理 2.12 (有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類) $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする. 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は, $\lambda \in \mathbb{N}$ に対する $L(\lambda)$ で同型を除いて尽くされる. $L(\lambda)$ は $\lambda + 1$ 次元のウェイト加群であり, そのウェイトは $\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots, -\lambda$ (すべて重複度 1) である.

証明 0 でない有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は極大ベクトルをもち (命題 2.11), 有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の場合, それは自動的に極大生成ベクトルとなる. よって, 主張は, 最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類 (定理 2.8) から従う. □

系 2.13 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする. V を有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とし, それにおけるウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ の重複度を m_λ と書く.

- (1) V はウェイト加群であり、そのウェイトはすべて整数である。
- (2) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して、 $m_\lambda = m_{-\lambda}$ である。
- (3) $m_0 \geq m_2 \geq m_4 \geq \dots$ かつ $m_1 \geq m_3 \geq m_5 \geq \dots$ である。
- (4) V は完全可約である。さらに、 $L(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{N}$) の V における重複度は、 $m_{\lambda+2} - m_\lambda$ である。

証明 Weyl の完全可約性定理より V は完全可約だから、主張は、 V が有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群である場合に示せば十分である。この場合の主張は、いずれも、有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類 (定理 2.12) から容易に確かめられる。□

系 2.14 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする。 V を有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とし、そのウェイト $\lambda \in \mathbb{K}$ のウェイト空間を V_λ と書く。

- (1) X の作用が定める V_λ から $V_{\lambda+2}$ への線型写像 (命題 2.3 より定まる) は、 λ が -1 以下の整数のとき単射であり、 -1 以上の整数のとき全射である。
- (2) Y の作用が定める V_λ から $V_{\lambda-2}$ への線型写像 (命題 2.3 より定まる) は、 λ が 1 以下の整数のとき全射であり、 1 以上の整数のとき単射である。

証明 Weyl の完全可約性定理より V は完全可約だから、主張は、 V が有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群である場合に示せば十分である。この場合の主張は、いずれも、有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類 (定理 2.12) から容易に確かめられる。□

3 分裂簡約 Lie 代数

3.1 分裂簡約 Lie 代数とそのルート系

定義 3.1 (分裂半単純・簡約 Lie 代数) $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とする。 $\mathfrak{g}$ の**分裂化 Cartan 部分代数** (splitting Cartan subalgebra) とは、 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ であって、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ が同時対角化可能であるものをいう。このような $\mathfrak{h}$ が存在するとき、 $\mathfrak{g}$ は**分裂可能** (splittable) であるといい、組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を**分裂簡約 Lie 代数** (split reductive Lie algebra) という。さらに、 $\mathfrak{g}$ が半単純・単純である場合には、それぞれ、組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を**分裂半単純 Lie 代数** (split semisimple Lie algebra) ・**分裂単純 Lie 代数** (split simple Lie algebra) という。

分裂簡約 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への**同型** (isomorphism) とは、同型 $\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ であって $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ を満たすものをいう。これが存在するとき、 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ は**同型** (isomorphic) であるという。

$\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とし、 $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とすると、 $\mathfrak{h}$ は可換であり、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元は半単純である (定理 1.35)。したがって、 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であるためには、 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の任意の元が三角化可能であれば十分である。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると、写像 $\alpha \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ に対応する $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の同時固有空間を、 $\mathfrak{g}_\alpha$ と書く。すなわち、

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \alpha(h)x\}$$

と書く。明らかに、 $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ となりうるのは $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ のときだけである。

定義 3.2 (分裂簡約 Lie 代数のルート系) 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート系** (root system) を,

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

と定める. $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の各元を, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート** (root) という.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能であり, 定理 1.35 より $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ だから, 直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する. これを, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の**ルート空間分解** (root space decomposition) といい, 各 $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) を, **ルート空間** (root space) という. $\mathfrak{g}$ は有限次元だから, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は有限である.

注意 3.3 $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数の有限族とし, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ と置く. このとき, $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は, 各 $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_i$ を用いて $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ と書ける (命題 1.5). $h = \sum_{i \in I} h_i$ ($h_i \in \mathfrak{h}_i$) に対して,

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h) = \bigoplus_{i \in I} \text{ad}_{\mathfrak{g}_i}(h_i)$$

だから, $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(h)$ が対角化可能であるための必要十分条件は, 各 $\text{ad}_{\mathfrak{h}_i}(h_i)$ が対角化可能であることである. したがって, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, 各 $\mathfrak{h}_i$ が $\mathfrak{g}_i$ の分裂化 Cartan 部分代数であることである. さらに, これらの条件の下で, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i & (\alpha = 0) \\ (\mathfrak{g}_i)_{\alpha|_{\mathfrak{h}_i}} & (\alpha|_{\mathfrak{h}_i} \neq 0 \text{ かつ 任意の } j \in I \setminus \{i\} \text{ に対して } \alpha|_{\mathfrak{h}_j} = 0) \\ 0 & (\text{任意の } j \in I \text{ に対して } \alpha|_{\mathfrak{h}_j} \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に, $\mathfrak{h}^*$ から $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{h}_i^*$ への自然な線型同型写像は, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\coprod_{i \in I} \Delta(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ への全単射を与える.

注意 3.4 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の簡約 Lie 代数とすると, $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換 Lie 代数 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の (Lie 代数としての) 直和に分解される (参照). よって, 注意 3.3 の特別な場合として, 次のことがいえる.

- $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は, $\mathfrak{g}'$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ を用いて, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ と書ける. $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であるための必要十分条件は, $\mathfrak{h}'$ が $\mathfrak{g}'$ の分裂化 Cartan 部分代数であることである.
- 上記の条件の下で, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) & (\alpha = 0) \\ \mathfrak{g}'_{\alpha|_{\mathfrak{h}'}} & (\alpha \neq 0 \text{ かつ } \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0) \\ 0 & (\alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} \neq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ に含まれ, V から $\mathfrak{h}'^*$ への線型同型写像 $\alpha \mapsto \alpha|_{\mathfrak{h}'}$ は, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ への全単射を与える.

注意 3.5 $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし, $\mathbb{K}'$ をその拡大体とする. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると, $\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}$ は $\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}$ の Cartan 部分代数であり (命題 1.6 (1)), $\text{ad}_{\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')}}(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')}) = \{T_{(\mathbb{K}')} \mid T \in \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\}$ は同時対角化可能だから, $(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} , \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})$ は $\mathbb{K}'$ 上の分裂簡約 Lie 代数である. また, $\alpha' \in (\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})^*$ に対して,

$$(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')})_{\alpha'} = \begin{cases} (\mathfrak{g}_{\alpha})_{(\mathbb{K}')} & (\alpha' = \alpha_{(\mathbb{K}')} , \alpha \in \mathfrak{h}^*) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に, $\mathfrak{h}^*$ から $(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})^*$ への写像 $\alpha \mapsto \alpha_{(\mathbb{K}')}$ は, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} , \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})$ への全単射を与える. これにより, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K}')} , \mathfrak{h}_{(\mathbb{K}')})$ は, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の $\mathbb{K}'$ への係数拡大と同一視できる.

命題 3.6 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする.

- (1) 任意の $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つ.
- (2) $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を不変な双線型形式とする. このとき, 任意の $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ であって $\alpha + \beta \neq 0$ を満たすものに対して, $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$ が成り立つ.
- (3) $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ を非退化かつ不変な双線型形式とする. このとき, 任意の $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して, 双線型形式 $B|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}: \mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow \mathbb{K}$ は非退化である. 特に, 双線型形式 $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$ は非退化である.

証明 (1) $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}, y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ とすると, 任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y]$$

だから, $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である. よって, $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である.

(2) $\alpha + \beta \neq 0$ であるとして, $\alpha(h) + \beta(h) \neq 0$ を満たす $h \in \mathfrak{h}$ をとる. $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}, y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ とすると, B の不変性より

$$0 = B([h, x], y) + B(x, [h, y]) = \alpha(h)B(x, y) + \beta(h)B(x, y)$$

だから, $B(x, y) = 0$ である. よって, $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$ である.

(3) $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ が $B(x, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = 0$ を満たすとする. (2) より, 任意の $\beta \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}$ に対しても $B(x, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$ だから, $B(x, \mathfrak{g}) = 0$ である. B は非退化だから, これより, $x = 0$ を得る. 同様にして, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, y) = 0$ を満たすならば $y = 0$ であることもわかる. よって, $B|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ は非退化である. 特に, $\alpha = 0$ として, $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ が非退化であることを得る. $\square$

系 3.7 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. 任意の $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ に対して, $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})$ のすべての元は冪零である.

証明 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ は有限集合だから, $p \in \mathbb{N}$ を $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}) + p\alpha$ が $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ と交わらないようにとれる. このとき, 任意の $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ に対して $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})^p \mathfrak{g}_{\beta} \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+p\alpha} = 0$ だから (命題 3.6 (1)), $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})^p \mathfrak{g} = 0$ である. よって, $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})$ のすべての元は冪零である. $\square$

3.2 分裂簡約 Lie 代数における $\mathfrak{sl}_2$ 三対

定義 3.8 ($\mathfrak{sl}_2$ 三対) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を (H, X, Y) と書く. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{sl}_2$ 三対 ($\mathfrak{sl}_2$ -triple) とは, $\mathfrak{g}$ の元の組 (h, x, y) であって, H, X, Y をそれぞれ h, x, y に移す $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ から $\mathfrak{g}$ への線型写像が単射準同型であるものをいう.

注意 3.9 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 h, x, y が, 少なくとも一つは 0 でなく, 関係式 $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, $[x, y] = h$ を満たすとする. このとき, 容易に確かめられるように, h, x, y はいずれも 0 でない. さらに, h, x, y は $\text{ad}(h)$ の異なる固有空間に属するから, これらは線型独立である. よって, このとき, (h, x, y) は $\mathfrak{sl}_2$ 三対である.

定理 3.10 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$ および $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ は 1 次元である.
- (2) $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ であって $\alpha(H_\alpha) = 2$ を満たすものが一意に存在する.
- (3) H_α を (2) のとおりに定める. 任意の $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対して, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ であって $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ を満たすものが一意に存在する. さらに, このとき, $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三対である.

証明 $\mathfrak{g}$ 上の非退化かつ不変な双線型形式 B を一つ固定する ($\mathfrak{g}$ は簡約だから, $\mathfrak{g}$ の有限次元表現であって, 非退化なトレース形式をもつものが存在する (参照)). このトレース形式を B とすればよい (参照)). 命題 3.6 (3) より, $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ や $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ も非退化である. 次の 4 段階に分けて, 主張を示す.

(I) $\mathfrak{h}_\alpha$ が 1 次元であることを示す. $\mathfrak{h}$ 上の双線型形式 $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ は非退化だから, $h_\alpha \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ であって任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して $B(h, h_\alpha) = \alpha(h)$ を満たすものが (一意に) 存在する. $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ とすると, $[x, y] \in \mathfrak{h}$ (命題 3.6 (1)) であり, 任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned} B(h, [x, y]) &= B([h, x], y) \\ &= \alpha(h)B(x, y) \\ &= B(h, h_\alpha)B(x, y) \\ &= B(h, B(x, y)h_\alpha) \end{aligned}$$

だから, $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ が非退化であることより

$$[x, y] = B(x, y)h_\alpha \quad (*)$$

が成り立つ. 一方で, $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ であることと $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が非退化であることより, $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \mathbb{K}$ である. よって, $\mathfrak{h}_\alpha = B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha})h_\alpha = \mathbb{K}h_\alpha$ であり, $\mathfrak{h}_\alpha$ は 1 次元である.

(II) $\alpha(H_\alpha) = 2$ を満たす $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ が一意に存在することを示す. (I) で示したように $\mathfrak{h}_\alpha$ は 1 次元だから, あとは, $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha} \neq 0$ であることをいえばよい. $\mathfrak{h}_\alpha$ は 1 次元だから, $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のそれぞれの 1 次元部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}'_\alpha$ と $\mathfrak{g}'_{-\alpha}$ を, $[\mathfrak{g}'_\alpha, \mathfrak{g}'_{-\alpha}] = \mathfrak{h}_\alpha$ を満たすようにとれる. ここで, $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha} = 0$ であると仮定すると, $[\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{g}'_\alpha] = [\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{g}'_{-\alpha}] = 0$ となる. したがって, $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}_\alpha + \mathfrak{g}'_\alpha + \mathfrak{g}'_{-\alpha}$ と置くと,

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{h}_\alpha, \quad [\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{h}_\alpha] = [\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha] = 0$$

となるから, $\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零部分 Lie 代数である. $\mathfrak{s}$ の冪零根基は $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{h}_\alpha$ だから (参照), $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha)$ のすべての元は冪零である (参照). 一方で, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha) \subseteq \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能でもあるから, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\alpha) = 0$ となる. 随伴表現 $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ が $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上で単射であることと合わせれば, $\mathfrak{h}_\alpha = 0$ を得るが, これは (I) に反する. よって, 背理法より, $\alpha|_{\mathfrak{h}_\alpha} \neq 0$ である.

(III) 任意の $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対して, $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$ 三対となるような $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ をとれることを示す. $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が非退化であることと (*) より $[X_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathfrak{h}_\alpha$ だから, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ となるようにとれる. $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$ はいずれも 0 でなく, ルート空間分解に関して異なる直和因子に属するから,

これらは線型独立である。また、これらは関係式

$$[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha, \quad [X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$$

を満たす。よって、 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三対である。

(IV) $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が 1 次元であることを示す (このことから、(3) の一意性も従う)。 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ には非退化な双線型形式 $B|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ が存在するから、 $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ の次元は等しい。以下、 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が 1 次元であることを示す。 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を (H, X, Y) と書き、(III) でとった $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ と随伴表現によって、 $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす。すると、任意の $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して、

$$\begin{aligned} Hy &= [H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)y = -2y, \\ Xy &= [X_\alpha, y] = B(X_\alpha, y)h_\alpha \end{aligned}$$

となる (第 2 式の第 2 の等号は、(*) による)。ここで、 $y \neq 0$ かつ $B(X_\alpha, y) = 0$ であるとする、 y は有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $\mathfrak{g}$ のウェイト -2 の極大ベクトルとなるが、これは系 2.9 に反する。よって、任意の $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ に対して $B(X_\alpha, y) \neq 0$ だが、そのためには、 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ はたかだか 1 次元でなければならない。一方で、 $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ より $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq 0$ だから、 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ は 1 次元である。 $\square$

3.3 被約ルート系の公理を満たすことの証明

補題 3.11 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると、任意の $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、 $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である。ここで、 H_α は、定理 3.10 によって定まるものとする。

証明 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が $\mathfrak{sl}_2$ 三対となるようにとり (定理 3.10 (3)), これを随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす。すると、 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ は $\mathfrak{g}_\beta \neq 0$ に $\beta(H_\alpha)$ 倍で作用するから、有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $\mathfrak{g}$ はウェイト $\beta(H_\alpha)$ をもつ。系 2.13 (1) より、これは整数である。 $\square$

補題 3.12 $\mathfrak{g}$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数、 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元部分ベクトル空間とし、 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(h)x\}$$

と書く。 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 、 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 、 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 、 $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ とし、これらは次の条件を満たすとする*3。

- (i) $\alpha(H_\alpha) = 2$ である。
- (ii) $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三対である。
- (iii) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}(X_\alpha)$ と $\text{ad}(Y_\alpha)$ は局所冪零である。

このとき、

$$\theta_\alpha = e^{\text{ad}(X_\alpha)} e^{\text{ad}(-Y_\alpha)} e^{\text{ad}(X_\alpha)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると、次が成り立つ。

- (1) θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし、 $\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}}$ は、 $s_{H_\alpha}(h) = h - \alpha(h)H_\alpha$ によって定まる $\mathfrak{h}$ 上の線型写像 s_{H_α} に等しい。
- (2) $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^*$ は、 $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$ によって定まる $\mathfrak{h}^*$ 上の線型写像 s_α に等しい。

*3 本小節の範囲では、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数であり、 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ が定理 3.10 のように定まる $\mathfrak{sl}_2$ 三対である場合だけで十分である。一般の場合の主張は、存在定理 (定理 3.22) の証明で用いられる。

(3) s_α を (2) のとおりに定める. このとき, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ である.

証明 (1) 条件 (i) より, 直和分解 $\mathfrak{h} = \text{Ker } \alpha \oplus \mathbb{K}\alpha$ が成立する. $h \in \text{Ker } \alpha$ に対しては, $\text{ad}(X_\alpha)h = \alpha(h)X_\alpha = 0$ かつ $\text{ad}(Y_\alpha)h = -\alpha(h)Y_\alpha = 0$ だから,

$$\theta_\alpha(h) = h = s_{H_\alpha}(h)$$

である. また, 容易に確かめられるように, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ (その標準基底を (H, X, Y) と書く) において $e^{\text{ad}(X)}e^{\text{ad}(-Y)}e^{\text{ad}(X)}(H) = -H$ が成り立つから, 条件 (ii) と (i) より,

$$\theta_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha = s_{H_\alpha}(H_\alpha)$$

である. よって, θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし, $\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}} = s_{H_\alpha}$ が成り立つ.

(2) (1) より, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ と $h \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$\begin{aligned} (\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^*(\lambda)(h) &= \lambda(\theta_\alpha(h)) \\ &= \lambda(h - \alpha(h)H_\alpha) \\ &= \lambda(h) - \lambda(H_\alpha)\alpha(h) \\ &= s_\alpha(\lambda)(h) \end{aligned}$$

である. よって, $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^* = s_\alpha$ が成り立つ.

(3) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする. θ_α は $\mathfrak{g}$ の自己同型だから,

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta_\alpha^{-1}(x) \in V_\lambda\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, \theta_\alpha^{-1}(x)] = \lambda(h)\theta_\alpha^{-1}(x)\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [\theta_\alpha(h), x] = \lambda(h)x\} \end{aligned}$$

である. ここで, (1) と (2) より, θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし, $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^{* -1} = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$ を満たす. よって, 上式と合わせて,

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = s_\alpha(\lambda)(h)x\} \\ &= \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)} \end{aligned}$$

を得る. □

定理 3.13 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. このとき, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ 上の被約ルート系であり, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の双対ルート $\alpha^\vee \in V^*$ は

$$\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha) \quad (\lambda \in V)$$

によって与えられ, ルート鏡映 $s_\alpha: V \rightarrow V$ は

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha \quad (\lambda \in V)$$

によって与えられる. 特に, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が分裂半単純 Lie 代数ならば, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ 上の被約ルート系である. ここで, H_α は, 定理 3.10 によって定まるものとする.

証明 注意 3.4 より, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subseteq V$ である. また, 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, $\alpha \in V$ かつ $\alpha(H_\alpha) = 2$ だから, 主張の式によって定義される線型写像 $s_\alpha: V \rightarrow V$ は鏡映である.

以下, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ と鏡映 s_α ($\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) が被約ルート系の公理 (RS1)–(RS4) (参照) を満たすことを確かめる.

(RS1) $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が有限であることと 0 を含まないことは明らかである. $h \in \mathfrak{h}$ が任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\alpha(h) = 0$ を満たすとする, ルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ より, $\text{ad}(h) = 0$ である. すなわち, $h \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ である. これは, V 上の線型形式であって任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ において値 0 をとるものが 0 しかないことを意味する. よって, $\text{span } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = V$ である.

(RS2) $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし, $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる. すると, 系 3.7 より $\text{ad}(X_\alpha)$ と $\text{ad}(Y_\alpha)$ は冪零だから, これらは補題 3.12 の仮定を満たす. したがって, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\mathfrak{g}_\lambda$ と $\mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ は $\mathfrak{g}$ の自己同型によって移り合う. よって, s_α は $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を安定にする.

(RS3) 補題 3.11 で示したように, 任意の $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である.

(RS4) $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とする. $\text{ad}(H_\alpha)$ は $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ には $2\alpha(H_\alpha) = 4$ 倍写像として作用するから, 命題 3.6 (1) と合わせて,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{2\alpha} &= [H_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] + [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{3\alpha}] \end{aligned}$$

を得る. ところが, $\mathfrak{g}_\alpha$ は 1 次元だから (定理 3.10 (1)), $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ である. また, すでに示した (RS1)–(RS3) より $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ はルート系だから, $3\alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ であり (参照), したがって, $\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$ である. よって, 上式より $\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ であり, これは $2\alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を意味する. $\square$

定理 3.13 の状況で, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とするとき, 記号の濫用で, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対しても

$$\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha), \quad s_\alpha(\lambda) = \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$$

として, 双対ルート $\alpha^\vee$ やルート鏡映 s_α を $\mathfrak{h}^*$ 上に拡張する. すなわち, $Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0\}$ と置くと直和分解 $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$ が成立するが, $\alpha^\vee$ は Z 上では値 0 をとるとして拡張し, s_α は Z 上では恒等写像であるとして拡張する. このとき, $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}^{**}$ は自然な線型同型 $\mathfrak{h}^{**} \cong \mathfrak{h}$ を通して H_α に対応するから, しばしばこれらを同一視して $\alpha^\vee = H_\alpha$ などと書く. また, Weyl 群 $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ の V への作用も, Z 上には自明に作用するとして, $\mathfrak{h}^*$ への作用に拡張する.

系 3.14 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. このとき, $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の基底である. 特に, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が分裂半単純 Lie 代数ならば, $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\mathfrak{h}$ の基底である. ここで, H_α は, 定理 3.10 によって定まるものとする.

証明 定理 3.13 とルート系の一般論 (参照 1) より, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$ は $\mathfrak{h}'$ 上の被約ルート系であり, $\Pi^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ はその基底である. 特に, $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\mathfrak{h}'$ の基底である. $\square$

系 3.15 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数, $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を線型独立な二つのルートとし,

$$I_{\beta, \alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$$

と置く.

- (1) $I_{\beta, \alpha}$ は, $p, q \in \mathbb{N}$ を用いて $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける.
- (2) (1) の p と q について, $p - q = -n(\beta, \alpha) = -\beta(H_\alpha)$ である.
- (3) (1) の p と q について, $\gamma = \beta - q\alpha$ と置くと, $p + q = -n(\gamma, \alpha) = -\gamma(H_\alpha)$ であり, これは $0, 1, 2, 3$ のいずれかである.

証明 定理 3.13 とルート系の一般論から従う. □

命題 3.16 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. 二つのルート $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ について, $\alpha + \beta \neq 0$ ならば, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である.

証明 $\alpha = \beta$ ならば $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ だから, 主張は明らかである. $\alpha \neq \pm\beta$ である場合を考える. $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は被約ルート系だから (定理 3.13), このとき, α と β は線型独立である (参照). $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとり, これと随伴表現によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす. $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ を系 3.15 のとおりに定めると,

$$\mathfrak{s} = \bigoplus_{j \in I_{\beta, \alpha}} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$$

は $\mathfrak{g}$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群であり (命題 3.6 (1)), 各 $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ は $\mathfrak{s}$ のウェイト $(\beta + j\alpha)(H_\alpha) = -(p - q) + 2j$ (系 3.15 (2)) のウェイト空間であり, これらはすべて 1 次元である (定理 3.10 (1)). したがって, 有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $\mathfrak{s}$ のウェイトは $-(p + q), -(p + q) + 2, \dots, p + q$ であり, これらの重複度はすべて 1 だから, 系 2.13 (4) より, $\mathfrak{s}$ は最高ウェイト $p + q$ の有限次元既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $L(p + q)$ に同型である. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $L(p + q)$ への作用は, 0 でない各ウェイト空間を, そのウェイトに 2 を加えたウェイト空間に全射に移す. よって,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \text{ad}(X_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = X\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

が成り立つ. □

系 3.17 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とし, Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ , 負ルート全体のなす集合を Δ_- と書く.

- (1) $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ である.
- (2) $\bigoplus_{\alpha \in -\Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は, $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha$ である.
- (3) $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数は, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ である. 特に, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が分裂半単純 Lie 代数ならば, $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成する.

証明 (1) $\mathfrak{n}_+$ は, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり (命題 3.6 (1)), $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ を含む. 次に, $\beta \in \Delta_+$ とすると, 単純ルートの列 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Pi$ を, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \beta$ であり, かつ任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \in \Delta_+$ であるようにとれる (参照). このとき, 命題 3.16 を繰り返し適用することで, $\mathfrak{g}_\beta = [[\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}], \dots, \mathfrak{g}_{\alpha_k}]$ を得る. よって, $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{n}_+$ を Lie 代数として生成する.

(2) (1) と同様である.

(3) $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数を, $\mathfrak{g}'$ と置く. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり, $\bigoplus_{\alpha \in \Pi \cup (-\Pi)} \mathfrak{g}_\alpha$ を含むから (注意 3.4), $\mathfrak{g}' \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ である. 次に, (1) と (2) より, $\bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_- \subseteq \mathfrak{g}'$ である. また, 任意の $\alpha \in \Pi$ に対して $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}'$ であり (H_α は, 定理 3.10 によって定まるもの

とする), $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の基底だから (系 3.14), $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'$ である. よって,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}'$$

(第 1 の等号は, 注意 3.4 から従う) である. 以上より, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が成り立つ. $\square$

3.4 存在定理

本節の以下の部分では, $\delta_{\alpha\beta}$ を Kronecker のデルタとする.

Π をルート系の基底とすると, 異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, Cartan 整数 $n(\beta, \alpha)$ は 0 以下の整数である (参照). 本節の以下の部分では, このことに注意する.

補題 3.18 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. Δ を V 上のルート系とし, Π をその基底とする. Π が自由に生成する単位的結合 $\mathbb{K}$ 代数 $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$ ($\mathbb{K}^{\oplus \Pi}$ の標準基底を $(e_\gamma)_{\gamma \in \Pi}$ と書く) を考え, $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$ 上の線型写像 $\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\alpha, \hat{Y}_\alpha$ ($\alpha \in \Pi$) を,

$$\begin{aligned} \hat{H}_\alpha(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= \left(-\sum_{i=1}^k n(\gamma_i, \alpha) \right) (e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ \hat{X}_\alpha(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= \begin{cases} 0 & (k=0) \\ (\hat{Y}_{\gamma_1} \hat{X}_\alpha - \delta_{\alpha\gamma_1} \hat{H}_\alpha)(e_{\gamma_2} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) & (k \geq 1), \end{cases} \\ \hat{Y}_\alpha(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) &= e_\alpha \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k} \end{aligned}$$

によって定める (まず $\hat{H}_\alpha$ と $\hat{Y}_\alpha$ を定め, 次にそれらを用いて $\hat{X}_\alpha$ を次数 k に関して再帰的に定める). このとき, 任意の $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) $[\hat{H}_\alpha, \hat{H}_\beta] = 0.$
- (2) $[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] = n(\beta, \alpha) \hat{X}_\beta.$
- (3) $[\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha) \hat{Y}_\beta.$
- (4) $[\hat{X}_\alpha, \hat{Y}_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \hat{H}_\alpha.$

証明 (1), (4) 明らかである.

(3) 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Pi$ に対して,

$$\begin{aligned} & [\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\beta](e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ &= \left(-n(\beta, \alpha) - \sum_{i=1}^k n(\beta_i, \alpha) \right) (e_\beta \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) - \left(-\sum_{i=1}^k n(\beta_i, \alpha) \right) (e_\beta \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ &= -n(\beta, \alpha) (e_\beta \otimes e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \\ &= -n(\beta, \alpha) \hat{Y}_\beta(e_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma_k}) \end{aligned}$$

である. よって, $[\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha) \hat{Y}_\beta$ が成り立つ.

(2) 任意の $\gamma \in \Pi$ に対して, (1), (3), (4) より,

$$\begin{aligned}
0 &= [\hat{H}_\alpha, [\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma]] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta], \hat{Y}_\gamma] + [\hat{X}_\beta, [\hat{H}_\alpha, \hat{Y}_\gamma]] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta], \hat{Y}_\gamma] - n(\gamma, \alpha)[\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\gamma, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] + (n(\beta, \alpha) - n(\gamma, \alpha))[\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma] + (n(\beta, \alpha) - n(\gamma, \alpha))\delta_{\beta\gamma}\hat{H}_\beta \\
&= [[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\gamma]
\end{aligned}$$

である. よって, 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Pi$ に対して

$$\begin{aligned}
([\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta)(e_{\gamma_1} \otimes \dots \otimes e_{\gamma_k}) &= ([\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta)\hat{Y}_{\gamma_1} \dots \hat{Y}_{\gamma_k} 1 \\
&= \hat{Y}_{\gamma_1} \dots \hat{Y}_{\gamma_k} ([\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta) 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから, $[\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\beta] = n(\beta, \alpha)\hat{X}_\beta$ が成り立つ. □

補題 3.19 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. Δ を V 上の被約ルート系とし, Π をその基底とする. $\tilde{\mathfrak{g}}$ を, $\alpha \in \Pi$ に対する生成元

$$\tilde{H}_\alpha, \quad \tilde{X}_\alpha, \quad \tilde{Y}_\alpha$$

と $\alpha, \beta \in \Pi$ に対する関係式

$$\begin{aligned}
(R1) \quad & [\tilde{H}_\alpha, \tilde{H}_\beta] = 0 \\
(R2) \quad & [\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = n(\beta, \alpha)\tilde{X}_\beta \\
(R3) \quad & [\tilde{H}_\alpha, \tilde{Y}_\beta] = -n(\beta, \alpha)\tilde{Y}_\beta \\
(R4) \quad & [\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\beta] = \delta_{\alpha\beta}\tilde{H}_\alpha
\end{aligned}$$

によって定まる Lie 代数とする. $\lambda \in V$ に対して

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } [\tilde{H}_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\}$$

と書き,

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{g}}_0, \quad \tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \quad \tilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\Pi \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

と定める.

- (1) 任意の $\lambda, \mu \in V$ に対して, $[\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \tilde{\mathfrak{g}}_\mu] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である.
- (2) 各 $\alpha \in \Pi$ に対して $\tilde{H}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$, $\tilde{X}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, $\tilde{Y}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ であり, 直和分解 $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ が成立する.
- (3) $\tilde{\mathfrak{h}}$, $\tilde{\mathfrak{n}}_+$, $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であり, 直和分解 $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_-$ が成立する. (したがって, $\lambda \in V \setminus (\mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \cup \mathbb{Z}_{\leq 0}\Pi)$ に対しては, $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = 0$ である.)
- (4) $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\tilde{\mathfrak{h}}$ の基底である.
- (5) $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ は Lie 代数として $(\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ によって生成される.

(6) $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ は Lie 代数として $(\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ によって生成される.*4

証明 (1) $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$, $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_\mu$ とすると, 任意の $\alpha \in \Pi$ に対して

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha^\vee(\lambda)[x, y] + \alpha^\vee(\mu)[x, y]$$

だから, $[x, y] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である. よって, $[\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \tilde{\mathfrak{g}}_\mu] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_{\lambda+\mu}$ である.

(2) $\tilde{H}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$, $\tilde{X}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, $\tilde{Y}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ は, それぞれ関係式 (R1), (RS2), (RS3) から従う.

$\tilde{\mathfrak{g}}$ はベクトル空間として「 $\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$ ($\alpha \in \Pi$) からなる有限列において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの」全体で生成されるが, 前段の結果と (1) より, このような元はある $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ に含まれる. よって, $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda \in V} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ が成り立つ. さらに, 線型代数の一般論より, この和は直和である.

(3), (4), (5), (6) ($(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ の線型独立性を除く) (1) より, $\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数である. (2) より, これらの和 $\tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}_+ + \tilde{\mathfrak{n}}_-$ は直和である.

$(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}, (\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}, (\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ が生成する $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数を, それぞれ $\tilde{\mathfrak{h}}', \tilde{\mathfrak{n}}'_+, \tilde{\mathfrak{n}}'_-$ と置く. これらは, それぞれ $\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$ に含まれる. 主張を示すためには, $\tilde{\mathfrak{g}}' = \tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_+ \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_-$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ 全体に一致することをいえばよい. $\tilde{\mathfrak{g}}'$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の生成元 $\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$ をすべて含むから, そのためには, $\tilde{\mathfrak{g}}'$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数であることをいえばよい. そのためには, $\tilde{\mathfrak{g}}'$ が $\text{ad}(\tilde{H}_\alpha), \text{ad}(\tilde{X}_\alpha), \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$ によって安定であることをいえば十分である. このことは, $\tilde{\mathfrak{g}}'$ がベクトル空間として

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\beta & \quad (\beta \in \Pi), \\ [\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] & \quad (k \geq 1 \text{ は整数}, \beta_1, \dots, \beta_k \in \Pi) \end{aligned}$$

の全体によって生成されることと, 次の主張から従う.

主張 3.20 上記の元に $\text{ad}(\tilde{H}_\alpha), \text{ad}(\tilde{X}_\alpha), \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$ を施した結果について, 次の表に述べたことが成り立つ. ここで, $c = n(\beta_1, \alpha) + \dots + n(\beta_k, \alpha)$ と置いた.

	$\tilde{H}_\beta$	$[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]$	$[\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\text{ad}(\tilde{H}_\alpha)$	0	$c[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]$	$-c[\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]$
$\text{ad}(\tilde{X}_\alpha)$	$-n(\alpha, \beta)\tilde{X}_\alpha$	$[\tilde{X}_\alpha, [\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]]$	$\begin{cases} \in \tilde{\mathfrak{h}}' & (k = 1) \\ \in \tilde{\mathfrak{n}}'_+ & (k \geq 2) \end{cases}$
$\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$	$n(\alpha, \beta)\tilde{Y}_\alpha$	$\begin{cases} \in \tilde{\mathfrak{h}}' & (k = 1) \\ \in \tilde{\mathfrak{n}}'_+ & (k \geq 2) \end{cases}$	$[\tilde{Y}_\alpha, [\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]]$

主張 3.20 の証明 $\tilde{H}_\beta$ の列の主張は, 関係式 (R1), (R2), (R3) から従う. $[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]]$ の列の主張と $[\tilde{Y}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{Y}_{\beta_2}, \tilde{Y}_{\beta_1}]]$ の列の主張は同様に示せるから, 前者のみを考える. $\text{ad}(\tilde{X}_\alpha)$ の行の主張は, 明らかである. $\text{ad}(\tilde{H}_\alpha)$ の行の主張は, (1) と (2) より $[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\beta_1 + \dots + \beta_k}$ であることから従う. $\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)$ の主張について, $k = 1$ のときは, 関係式 (R4) より,

$$\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)\tilde{X}_{\beta_1} = \delta_{\alpha\beta_1}\tilde{H}_\alpha \in \tilde{\mathfrak{h}}'$$

*4 より強く, $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ と $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ がそれぞれ $(\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ と $(\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ を基本族とする自由 Lie 代数であることまでいえる. 証明は, Bourbaki [3, §VIII.4.2, Proposition 3] を参照のこと.

である。また, $[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \in \tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_+$ であるとする, 関係式 (R4) より,

$$\begin{aligned} & \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_{k+1}}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \\ &= \text{ad}(\tilde{X}_{\beta_{k+1}}) \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] - \delta_{\alpha\beta_{k+1}} \text{ad}(\tilde{H}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \\ &\in \text{ad}(\tilde{X}_{\beta_{k+1}})(\tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \tilde{\mathfrak{n}}'_+) + \tilde{\mathfrak{n}}'_+ \\ &= \tilde{\mathfrak{n}}'_+ \end{aligned}$$

となる。よって, 帰納的に, $k \geq 2$ のとき $\text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)[\tilde{X}_{\beta_k}, \dots, [\tilde{X}_{\beta_2}, \tilde{X}_{\beta_1}]] \in \tilde{\mathfrak{n}}'_+$ であることを得る。 //

$(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ の線型独立性 生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と補題 3.18 より, Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$ 上の表現であって $\tilde{H}_\alpha, \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$ をそれぞれ $\hat{H}_\alpha, \hat{X}_\alpha, \hat{Y}_\alpha$ に移すものが, 一意に存在する。各 $\alpha \in \Pi$ に対して, $\mathbb{K}^{\oplus \Pi}$ (を $\mathbf{T}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$ の部分ベクトル空間とみなしたものは $\hat{H}_\alpha$ 安定であり, $\mathbb{K}^{\oplus \Pi}$ の標準基底に関する $\hat{H}_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus \Pi}}$ の行列表示は, (β, β) 成分が $n(\beta, \alpha)$ である対角行列である。Cartan 行列 $(n(\beta, \alpha))_{(\beta, \alpha) \in \Pi \times \Pi}$ は正則だから (参照), $(\hat{H}_\alpha|_{\mathbb{K}^{\oplus \Pi}})_{\alpha \in \Pi}$ は $\text{End}(\mathbb{K}^{\oplus \Pi})$ において線型独立である。特に, $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ において線型独立である。 $\square$

補題 3.21 V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。 Δ を V 上の被約ルート系とし, Π をその基底とする。 $\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, \tilde{\mathfrak{n}}_+, \tilde{\mathfrak{n}}_-$ を, 補題 3.19 のとおりに定義する。異なる二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して

$$\tilde{X}_{\alpha\beta} = \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\beta, \quad \tilde{Y}_{\alpha\beta} = \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{Y}_\beta$$

と定め, $\tilde{X}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\tilde{\mathfrak{a}}_+$ と置き, $\tilde{Y}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルを $\tilde{\mathfrak{a}}_-$ と置く。このとき,

$$\tilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi \setminus \{0\}} (\tilde{\mathfrak{a}}_+ \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+, \quad \tilde{\mathfrak{a}}_- = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \Pi \setminus \{0\}} (\tilde{\mathfrak{a}}_- \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_-$$

が成り立つ。

証明 どちらも同様だから, $\tilde{\mathfrak{a}}_+$ に関する主張を示す。 $\tilde{\mathfrak{a}}_+$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルであり, 特に $\text{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})$ 安定だから, 線型代数の一般論より,

$$\tilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in V} (\tilde{\mathfrak{a}}_+ \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$$

が成り立つ。あとは, $\tilde{\mathfrak{a}}_+$ が $\tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ に含まれることを示せばよい。以下, $\tilde{X}_{\alpha\beta}$ の全体が生成する $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分ベクトル空間を, $\tilde{\mathfrak{a}}_+^0$ と置く。

まず, $[\tilde{\mathfrak{n}}_-, \tilde{\mathfrak{a}}_+^0] = 0$ を示す。 $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ は Lie 代数として $(\tilde{Y}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ によって生成されるから (補題 3.19 (6)), そのためには, 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ ($\alpha \neq \beta$) に対して $[\tilde{Y}_\gamma, \tilde{X}_{\alpha\beta}] = 0$ であることをいえばよい。 $\gamma \neq \alpha$ のとき, 関係式 (R2) と (R4) より,

$$\begin{aligned} [\tilde{Y}_\gamma, \tilde{X}_{\alpha\beta}] &= \text{ad}(\tilde{Y}_\gamma) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\beta \\ &= \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \text{ad}(\tilde{Y}_\gamma) \tilde{X}_\beta \\ &= -\delta_{\beta\gamma} \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{H}_\beta \\ &= \delta_{\beta\gamma} n(\alpha, \beta) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

である ($n(\beta, \alpha) = 0$ ならば $n(\alpha, \beta) = 0$ であり, $n(\beta, \alpha) < 0$ ならば $\text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\alpha = 0$ だから, 最後の等式が成り立つ). $\gamma = \alpha$ のとき, 関係式 (R2), (R3), (R4) と補題 2.10 (2) より,

$$\begin{aligned} [\tilde{Y}_\alpha, \tilde{X}_{\alpha\beta}] &= \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \tilde{X}_\beta \\ &= \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} \text{ad}(\tilde{Y}_\alpha) \tilde{X}_\beta - (1 - n(\beta, \alpha)) \text{ad}(\tilde{X}_\alpha)^{-n(\beta, \alpha)} (\text{ad}(\tilde{H}_\alpha) - n(\beta, \alpha)) \tilde{X}_\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって, いずれの場合にも, $[\tilde{Y}_\gamma \tilde{X}_{\alpha\beta}] = 0$ が成り立つ.

次に, $\tilde{\mathfrak{a}}_+ \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+$ を示す. $\tilde{\mathfrak{g}}$ の随伴表現に対応する包絡代数の表現を $\rho: \mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{End}(\tilde{\mathfrak{g}})$ と書くと,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{a}}_+ &= \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{g}})) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 \\ &= \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{h}})) \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 && \text{(補題 3.19 (3), Poincaré–Birkhoff–Witt の定理*5)} \\ &= \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{h}})) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 && \text{(前段の結果)} \\ &\subseteq \rho(\mathbf{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_+)) \tilde{\mathfrak{a}}_+^0 && \text{(補題 3.19 (1), (2) より } [\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{X}_{\alpha\beta}] \subseteq \mathbb{K} \tilde{X}_{\alpha\beta} \text{)} \\ &\subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+ && (\tilde{\mathfrak{a}}_+^0 \subseteq \tilde{\mathfrak{n}}_+) \end{aligned}$$

である. これで, 主張が示された. □

定理 3.22 (存在定理) V を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. Δ を V 上の被約ルート系とし, Π をその基底とする. $\mathfrak{g}$ を, $\alpha \in \Pi$ に対する生成元

$$H_\alpha, \quad X_\alpha, \quad Y_\alpha$$

と $\alpha, \beta \in \Pi$ に対する関係式

$$\begin{aligned} \text{(R1)} \quad & [H_\alpha, H_\beta] = 0 \\ \text{(R2)} \quad & [H_\alpha, X_\beta] = n(\beta, \alpha) X_\beta \\ \text{(R3)} \quad & [H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta, \alpha) Y_\beta \\ \text{(R4)} \quad & [X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha \\ \text{(R5)} \quad & \text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} X_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ \text{(R6)} \quad & \text{ad}(Y_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} Y_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \end{aligned}$$

によって定まる Lie 代数とし, $\mathfrak{h} = \text{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ と定める.

- (1) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数である.
- (2) $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\mathfrak{h}$ の基底である.
- (3) (2) より, 各 $\alpha \in \Pi$ に対して $\alpha^\vee$ を H_α に移すことで V^* から $\mathfrak{h}$ への線型同型写像が定まるが, これが誘導する線型同型写像 $\Phi: V \rightarrow \mathfrak{h}^*$ は, ルート系 Δ から $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ への同型である.

証明 補題 3.19 と補題 3.21 の記号を用いると, $\mathfrak{g}$ は商 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}/(\tilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{a}}_-)$ であり, 等化準同型を $\varpi: \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$

*5 Poincaré–Birkhoff–Witt の定理 (の定式化の一つ) は, 「 $\mathfrak{g}$ が (任意の可換体上の) Lie 代数であり, $(x_i)_{i \in I}$ が $\mathfrak{g}$ の全順序集合 I で添字付けられた基底であるとき, $n \in \mathbb{N}$ と $i_1, \dots, i_n \in I$ が $i_1 \leq \dots \leq i_n$ を満たす範囲を動くときの $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ の全体が, 包絡代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の基底をなす」ことを主張している. この主張のうち, 「(ベクトル空間として) 生成する」ことは, 帰納法によって容易に証明できる. ここで必要なのは, 「(ベクトル空間として) 生成する」ことだけである.

と書くと, $\varpi(\tilde{H}_\alpha) = H_\alpha$, $\varpi(\tilde{X}_\alpha) = X_\alpha$, $\varpi(\tilde{Y}_\alpha) = Y_\alpha$ である. 補題 3.19 (2), (3) より, 直和分解

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\lambda \in V} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi \cup \mathbb{Z}_{\leq 0} \Pi} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$$

が成立する. このことと補題 3.21 より, $\mathfrak{g}_\lambda = \varpi(\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) = \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda / ((\tilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda)$ と置くと, 直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in V} \mathfrak{g}_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi \cup \mathbb{Z}_{\leq 0} \Pi} \mathfrak{g}_\lambda \quad (*)$$

が成立する.

直和分解 (*) における $\lambda = 0$ に対応する因子については, $(\tilde{\mathfrak{a}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{a}}_-) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_0 = 0$ だから (補題 3.21), ϖ は $\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{g}}_0$ から $\mathfrak{g}_0$ への同型を与える. $(\tilde{H}_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ は $\tilde{\mathfrak{h}}$ の基底だから, $(H_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ の基底である. これで (2) が示され, したがって, 線型同型写像 $\Phi: V \rightarrow \mathfrak{h}^*$ を (3) のように定義できる.

$\lambda \in V$ に対して

$$\mathfrak{g}_\lambda \subseteq \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } \alpha \in \Pi \text{ に対して } [H_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\}$$

だが, λ が動くとき, 左辺の和は直和分解 (*) を与え, 右辺の和は線型代数の一般論より直和だから, 上式では等号が成り立つ. (3) の線型同型写像 $\Phi: V \rightarrow \mathfrak{h}^*$ を用いれば,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\lambda &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } \lambda \in \Pi \text{ に対して } [H_\alpha, x] = \alpha^\vee(\lambda)x\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } [h, x] = \Phi(\lambda)(h)x\} \end{aligned} \quad (**)$$

とも書ける.

主張 3.23 $\alpha \in \Pi$ とする.

(1) $\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\text{ad}(X_\alpha)$ と $\text{ad}(Y_\alpha)$ は局所冪零である.

(2) $\mathfrak{g}$ の自己同型 θ_α を

$$\theta_\alpha = e^{\text{ad}(X_\alpha)} e^{\text{ad}(-Y_\alpha)} e^{\text{ad}(X_\alpha)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

と定めると ((1) より可能である), 任意の $\lambda \in V$ に対して, $\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{s_\alpha(\lambda)}$ が成り立つ.

主張 3.23 の証明 (1) どちらも同様だから, $\text{ad}(X_\alpha)$ が局所冪零であることを示す. $\text{ad}(X_\alpha)$ は $\mathfrak{g}$ 上の導分だから, $\text{ad}(X_\alpha)$ を繰り返し施すと 0 になる元全体は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数をなす. 任意の $\beta \in \Pi$ に対して, H_β , X_β , Y_β に $\text{ad}(X_\alpha)$ を繰り返し施すと 0 になることを示せばよい. これは,

$$\begin{aligned} \text{ad}(X_\alpha)^2 H_\beta &= \text{ad}(X_\alpha)(-n(\beta, \alpha)X_\alpha) = 0, \\ \text{ad}(X_\alpha)X_\alpha &= 0, \\ \text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} X_\beta &= 0 & (\beta \neq \alpha), \\ \text{ad}(X_\alpha)^3 X_\beta &= \text{ad}(X_\alpha)^2(\delta_{\alpha\beta}H_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

であることから従う.

(2) $\Phi(\alpha)(H_\alpha) = \alpha^\vee(\alpha) = 2$ であり, $\mathfrak{g}_\lambda$ は (**) のように書け, $H_\alpha \neq 0$ であることと関係式 (R2), (R3), (R4) より $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三対である (注意 3.9). よって, $\Phi(\alpha)$ と $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$ は補題 3.12 の仮定を満たし, 主張はこの補題の (3) から従う. //

主張 3.24 $\mathfrak{g}_\lambda$ ($\lambda \in V$) は, $\lambda = 0$ ならば $\mathfrak{h}$ であり, $\lambda \in \Delta$ ならば 1 次元であり, それ以外ならば 0 である. 特に, $\mathfrak{g}$ は有限次元であり, 直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成立する.

主張 3.24 の証明 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ はすでに示した. (*) より, $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ となりうるのは, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \cup \mathbb{Z}_{\leq 0}\Pi$ のときだけである. $\lambda \in \mathbb{Z}\Delta$ が一つのルートの整数倍として書けなければ, ある $s \in \mathbf{W}(\Delta)$ が存在して $s(\lambda) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \cup \mathbb{Z}_{\leq 0}\Pi$ となるから (参照), 主張 3.23 (2) より, $\mathfrak{g}_\lambda = 0$ である.

以下, ルート $\alpha \in \Delta$ と正の整数 m に対して,

$$\dim \mathfrak{g}_{m\alpha} = \begin{cases} 1 & (m = 1) \\ 0 & (m \geq 2) \end{cases}$$

を示す. 被約ルート系 Δ の任意のルートが Weyl 群の作用によって単純ルートに移せること (参照) と主張 3.23 (2) より, 単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対してこれを示せば十分である. $\tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \setminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ は Lie 代数として $(\tilde{X}_\beta)_{\beta \in \Pi}$ によって生成されるから (補題 3.19 (5)), $\mathfrak{n}_+ = \varpi(\tilde{\mathfrak{n}}_+) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\lambda$ は Lie 代数として X_α によって生成される. したがって, $\mathfrak{n}_+$ はベクトル空間として

$$X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_k} \text{ において任意の結合順で Lie 括弧積をとったもの } (k \in \mathbb{N}_{>0}, \beta_1, \dots, \beta_k \in \Pi) \quad (***)$$

の全体によって生成される. (***) は直和因子 $\mathfrak{g}_{\beta_1 + \dots + \beta_k}$ に属するが (補題 3.21 (1)), $\beta_1 + \dots + \beta_k = m\alpha$ となるのは $k = m$ かつ $\beta_1 = \dots = \beta_k = \alpha$ のときだけである. $m \geq 2$ のとき, (***) は常に 0 だから, $\mathfrak{g}_{m\alpha} = 0$ である. $m = 1$ のとき, (***) は X_α だから, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{K}X_\alpha$ である. もし $X_\alpha = 0$ ならば $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha] = 0$ となりすでに示した (2) に矛盾するから, $X_\alpha \neq 0$ であり, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ を得る. これで, 主張が示された. //

主張 3.25 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は分裂半単純 Lie 代数であり, そのルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $\Phi(\Delta)$ に等しい.

主張 3.25 の証明 $\mathfrak{g}$ が半単純であること $\mathfrak{g}$ の任意の可解イデアル $\mathfrak{r}$ が 0 であることを示す. $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり, 特に $\text{ad}(\mathfrak{h})$ 安定だから, 主張 3.24 と線型代数の一般論より, 直和分解

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha)$$

が成立する.

まず, $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$ を示す. 上式より, そのためには, 任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha = 0$ を示せばよい. 被約ルート系 Δ の任意のルートが Weyl 群の作用によって単純ルートに移せること (参照) と主張 3.23 (2) より, 単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対してこれを示せば十分である. この場合, 主張 3.24 より, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{K}X_\alpha$ である. また, 関係式 (R2), (R3), (R4) と $H_\alpha \neq 0$ であることより $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三対だから (注意 3.9), $\text{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の単純部分 Lie 代数である. よって,

$$\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{r} \cap \mathbb{K}X_\alpha \subseteq \mathfrak{r} \cap \text{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\} = 0$$

が成り立つ.

次に, $\mathfrak{r} = 0$ を示す. $\alpha \in \Pi$ を任意にとる. 前段で示したように $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$ であり, (**) が成り立つから, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_\alpha] = \Phi(\alpha)(\mathfrak{r})\mathfrak{g}_\alpha$ である. 一方で, $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルだから, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{h}$ である. したがって, $\Phi(\alpha)(\mathfrak{r}) = 0$ である. 任意の $\alpha \in \Pi$ に対してこれが成り立ち, $\Phi(\Pi)$ は $\mathfrak{h}^*$ の基底だから, $\mathfrak{r} = 0$ である.

$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であること (**) のとおり $\mathfrak{g}$ は $\text{ad}(\mathfrak{h})$ の同時固有空間の直和に同時固有値 0 の同時固有空間は $\mathfrak{h}$ である. よって, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数である (定理 1.35).

$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \Phi(\Delta)$ であること (**) と主張 3.24 から従う. //

これで, すべての主張が示された. $\square$

3.5 一意性定理と同型定理

命題 3.26 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. 各 $\alpha \in \Pi$ に対して, $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる. このとき, 任意の $\alpha, \beta \in \Pi$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) $[H_\alpha, H_\beta] = 0$.
- (2) $[H_\alpha, X_\beta] = n(\beta, \alpha)X_\beta$.
- (3) $[H_\alpha, Y_\beta] = -n(\beta, \alpha)Y_\beta$.
- (4) $[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta}H_\alpha$.
- (5) $\text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}X_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$ の場合).
- (6) $\text{ad}(Y_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}Y_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$ の場合).

証明 (1), (2), (3) 明らかである.

(4) $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ であることは明らかである. $\alpha \neq \beta$ であるとする, ルート系の基底の定義より $\alpha - \beta \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\}$ だから, $[X_\alpha, Y_\beta] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = 0$ である (命題 3.6 (1)).

(5) $\alpha \neq \beta$ であるとする. $I_{\beta, \alpha} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \beta + j\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}$ と置くと, 系 3.15 (1) より, $p, q \in \mathbb{N}$ を用いて $I_{\beta, \alpha} = [-q, p] \cap \mathbb{Z}$ と書ける. ルート系の基底の定義より $\beta - \alpha \notin \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ だから, $q = 0$ であり, 系 3.15 (2) と合わせて $p = p - q = -n(\beta, \alpha)$ を得る. よって,

$$\text{ad}(X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}X_\beta \in \text{ad}(\mathfrak{g}_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)}\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+(1-n(\beta, \alpha))\alpha} = 0$$

である (命題 3.6 (1)).

(6) (5) と同様である. $\square$

定理 3.27 (一意性定理) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. 各 $\alpha \in \Pi$ に対して, $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ を, 被約ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とその基底 Π から存在定理 (定理 3.22) の方法で定まる分裂半単純 Lie 代数とする (ただし, 存在定理における $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$ を, ここではそれぞれ $H_{0, \alpha}, X_{0, \alpha}, Y_{0, \alpha}$ と書く). このとき, 準同型 $\phi: \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ であって $H_{0, \alpha}, X_{0, \alpha}, Y_{0, \alpha}$ をそれぞれ $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$ に移すものが一意に存在する. さらに, この ϕ は, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ から $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ への同型である.

証明 生成元と関係式で定まる Lie 代数の普遍性と命題 3.26 より, 準同型 $\phi: \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ であって $H_{0, \alpha}, X_{0, \alpha}, Y_{0, \alpha}$ をそれぞれ $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$ に移すものが一意に存在する. X_α と Y_α の全体は $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成するから (系 3.17 (3)), この ϕ は全射である. さらに, 存在定理 (定理 3.22 (3)) より, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ と $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は同型だから,

$$\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{h}_0^* + \#\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0) = \dim \mathfrak{h}^* + \#\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ。よって、 ϕ は同型である。さらに、 ϕ は、 $\mathfrak{h}_0 = \text{span}\{H_{0,\alpha} \mid \alpha \in \Pi\}$ を $\mathfrak{h} = \text{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ に移すから、 $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ から $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ への同型である。□

定理 3.28 (同型定理) $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数とし、 Π_1 と Π_2 をそれぞれルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ の基底とする。 $\Phi: \mathfrak{h}_1^* \rightarrow \mathfrak{h}_2^*$ をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型であって Π_1 を Π_2 に移すものとし、各 $\alpha \in \Pi_1$ に対して、 $\phi_\alpha: (\mathfrak{g}_1)_\alpha \rightarrow (\mathfrak{g}_2)_{\Phi(\alpha)}$ を線型同型とする。このとき、 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型 ϕ であって

$$(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \Phi, \quad \phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha \quad (\alpha \in \Pi_1)$$

を満たすものが一意に存在する。

証明 各 $i \in \{1, 2\}$ と $\alpha \in \Pi_i$ に対して、 $\mathfrak{g}_i$ における $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_{i,\alpha}, X_{i,\alpha}, Y_{i,\alpha})$ を定理 3.10 のようにとる。必要ならば各 $X_{2,\alpha}$ をスカラー倍だけ調整して、 $\phi_\alpha(X_{1,\alpha}) = X_{2,\alpha}$ であるとする。

ϕ を $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型とする。各 $\mathfrak{g}_\alpha$ は 1 次元だから (定理 3.10 (1)), $\phi|_{(\mathfrak{g}_1)_\alpha} = \phi_\alpha$ であるための必要十分条件は、

$$\phi(X_{1,\alpha}) = X_{2,\Phi(\alpha)} \quad (*)$$

であることである。また、線型同型写像 $\Phi^{*-1}: \mathfrak{h}_1^* \rightarrow \mathfrak{h}_2^*$ は各 $H_{1,\alpha} = \alpha^\vee$ を $H_{2,\Phi(\alpha)} = \Phi(\alpha)^\vee$ に移すから、 $(\phi|_{\mathfrak{h}_1})^{*-1} = \Phi$ であるための必要十分条件は、任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して

$$\phi(H_{1,\alpha}) = H_{2,\Phi(\alpha)} \quad (**)$$

であることである。次に、 ϕ が任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して $(*)$ と $(**)$ を満たすとする。すると、各 $\alpha \in \Pi_1$ に対して、 $\phi(Y_{1,\alpha}) = \phi((\mathfrak{g}_1)_{-\alpha}) = (\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$ であり、 $(\mathfrak{g}_2)_{-\Phi(\alpha)}$ は 1 次元だから (定理 3.10 (1)), ある $c_\alpha \in \mathbb{K}$ を用いて $\phi(Y_{1,\alpha}) = c_\alpha Y_{2,\Phi(\alpha)}$ と書ける。ところが、

$$\begin{aligned} H_{2,\Phi(\alpha)} &= \Phi(H_{1,\alpha}) \\ &= \Phi([X_{1,\alpha}, Y_{2,\alpha}]) \\ &= [\Phi(X_{1,\alpha}), \Phi(Y_{2,\alpha})] \\ &= c_\alpha [X_{2,\Phi(\alpha)}, Y_{2,\Phi(\alpha)}] \\ &= c_\alpha H_{2,\Phi(\alpha)} \end{aligned}$$

だから、 $c_\alpha = 1$ であり、

$$\phi(Y_{1,\alpha}) = Y_{2,\Phi(\alpha)} \quad (***)$$

が成り立つ。

前段の議論より、 $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ から $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ への同型 ϕ が主張の条件を満たすための必要十分条件は、任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対して $(*)$, $(**)$, $(***)$ が成り立つことである。一意性定理 (定理 3.27) より、このような ϕ は、一意に存在する。□

系 3.29 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂可能簡約 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数は、すべて $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ の下で共役である。

証明 $\mathfrak{g}$ が半単純である場合に示せば十分だから (注意 3.4), 以下ではそのように仮定する。 $\overline{\mathbb{K}}$ を $\mathbb{K}$ の代数閉包とする。 $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とすると、それらの係数拡大 $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ と $\mathfrak{h}'_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の Cartan 部分代数だから (命題 1.6), Cartan 部分代数の共役性 (定理 1.28) より、 $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ の自己同型であって $\mathfrak{h}_{(\overline{\mathbb{K}})}$

を $\mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})}$ に移すものが存在する. この自己同型が誘導するルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})$ から $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})})$ への同型を, $\Psi: (\mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})^* \rightarrow (\mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})})^*$ と置く. $\mathfrak{h}^*$ から $(\mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})^*$ への写像 $\alpha \mapsto \alpha_{(\mathbb{K})}$ は $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}_{(\mathbb{K})})$ に移し, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ と $\Delta(\mathfrak{g}_{(\mathbb{K})}, \mathfrak{h}'_{(\mathbb{K})})$ についても同様だから (注意 3.5), Ψ は, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ から $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ への同型 $\Psi: \mathfrak{h}^* \rightarrow (\mathfrak{h}')^*$ を誘導する. よって, 同型定理 (定理 3.28) より, $\mathfrak{g}$ の自己同型であって $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}'$ に移すものが存在する. $\square$

命題 3.30 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) $\mathfrak{g}$ は単純である.
- (b) $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約である.

証明 明らかに, $\mathfrak{g} = 0$ と $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \emptyset$ とは同値である. 以下では, $\mathfrak{g} \neq 0$ である (したがって, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq \emptyset$ である) 場合を考える.

(a) $\implies$ (b) $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が二つの空でない被約ルート系 Δ_1 と Δ_2 の直和に分解されたとする. 存在定理 (定理 3.22) より, 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して, Δ_i に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ がとれる. $\Delta_i \neq \emptyset$ だから, $\mathfrak{g}_i \neq 0$ である. また, これらの直和 $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ は, $\Delta_1 \sqcup \Delta_2 = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に同型なルート系をもつ分裂半単純 Lie 代数である (注意 3.3). 同型定理 (定理 3.28) より, Lie 代数 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ は $\mathfrak{g}$ に同型である. よって, $\mathfrak{g}$ は単純でない.

(b) $\implies$ (a) $\mathfrak{g}$ が単純でないとする. $\mathfrak{g}$ は 0 でない半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の (Lie 代数としての) 直和に分解できる. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の Cartan 部分代数だから, 各 $\mathfrak{g}_i$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_i$ を用いて, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ と書ける. $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の分裂化 Cartan 部分代数であることから, 各 $\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ の分裂化 Cartan 部分代数であり, $\mathfrak{h}^*$ から $\mathfrak{h}_1^* \oplus \mathfrak{h}_2^*$ への自然な同型によって, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は二つの空でないルート系 $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ と $\Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ の直和に移される (注意 3.3). よって, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は可約である. $\square$

$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする. 存在定理 (定理 3.22), 同型定理 (定理 3.28), 系 3.29 より, 分裂可能半単純 Lie 代数の同型類, 分裂半単純 Lie 代数の同型類, 被約ルート系の同型類は一対一に対応する. さらに, 命題 3.30 より, その中で, 分裂可能単純 Lie 代数の同型類, 分裂単純 Lie 代数の同型類, 既約な被約ルート系の同型類は一対一に対応する. 分裂可能半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ または分裂半単純 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が A_l 型 ($l \geq 1$), B_l 型 ($l \geq 1$), C_l 型 ($l \geq 1$), D_l 型 ($l \geq 2$), E_6 型, E_7 型, E_8 型, F_4 型, G_2 型であるとは, そのルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ がその型であることをいう. A_l 型, B_l 型, C_l 型, D_l 型を総称して**古典型** (classical type) といい, E_6 型, E_7 型, E_8 型, F_4 型, G_2 型を総称して**例外型** (exceptional type) という. D_2 以外の各型のルート系は既約だから, それらには分裂可能単純 Lie 代数が対応する.

$\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とし, $\overline{\mathbb{K}}$ をその代数閉包とする. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とすると, その係数拡大 $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ は $\overline{\mathbb{K}}$ 上の半単純 Lie 代数であり (参照), $\overline{\mathbb{K}}$ が代数閉であることより自動的に分裂可能である. このことを踏まえて, 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が各型であるとは, 分裂可能半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ がその型であることをいう. $\mathfrak{g}$ が分裂可能である場合には, この定義は前段のものと一致する. $\mathfrak{g}_{(\overline{\mathbb{K}})}$ が単純ならば $\mathfrak{g}$ も単純だから (参照), $\mathfrak{g}$ が D_2 以外の型をもつならば, $\mathfrak{g}$ は単純である.

3.6 古典型分裂単純 Lie 代数

本小節では, 標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の古典型分裂 (半) 単純 Lie 代数を, 具体的に構成する. 以下, n 次単位行列を I_n と書き, 行列単位を $E_{i,j}$ と書く. また, $\mathbb{K}$ 上の $m \times n$ 行列全体のなす空間を $\text{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ ($m = n$

の場合は, $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ と書き, $\mathbb{K}$ 上の n 次対称行列全体のなす空間を $\text{Sym}(n, \mathbb{K})$ と書き, $\mathbb{K}$ 上の n 次歪対称行列全体のなす空間を $\text{SkewSym}(n, \mathbb{K})$ と書く.

A_l ($l \geq 1$) 型の分裂単純 Lie 代数

$\mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K})$ の部分 Lie 代数

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$$

は半単純 Lie 代数であり (参照),

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_{l+1}) \mid x_1, \dots, x_{l+1} \in \mathbb{K}, x_1 + \dots + x_{l+1} = 0\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる). 対応するルート系は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_{l+1})) &= x_i \text{ で与えられる元} \end{aligned}$$

だから, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は A_l 型の分裂単純 Lie 代数である. 各ルートの双対ルートは

$$H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} = \pm(E_{i,i} - E_{j,j})$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}E_{i,j}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}E_{j,i} \end{aligned}$$

である.

B_l ($l \geq 1$) 型の分裂単純 Lie 代数

対称双線型形式 $\Phi: \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \rightarrow \mathbb{K}$ を, 標準基底に関して行列表示

$$\tilde{S}_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l & 0 \\ I_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

をもつものとして定める. すると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \Phi) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \mid \tilde{S}_l X + X^T \tilde{S}_l = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B & 2v \\ C & -A^T & 2w \\ w^T & v^T & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}), B, C \in \text{SkewSym}(l, \mathbb{K}), v, w \in \mathbb{K}^l \right\} \end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり (参照),

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l, 0) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる). 対応するルート系は

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\},$$

各 $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ は, $\epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l, 0)) = x_i$ で与えられる元

だから, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は B_l 型の分裂単純 Lie 代数である. 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned} H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm\epsilon_i} &= \pm 2(E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) \end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i,l+j}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j} - E_{j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j} - E_{l+j,i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i} &= \mathbb{K}(2E_{i,2l+1} + E_{2l+1,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i^T & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i} &= \mathbb{K}(2E_{l+i,2l+1} + E_{2l+1,i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_i \\ e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である ($\mathbb{K}^l$ の標準基底を $(e_1, \dots, e_l)$ と書いた).

次に, B_l 型の分裂単純 Lie 代数を, 別の方法で実現する. $g \in GL(2l+1, \mathbb{K})$ を

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_l & \frac{1}{2}I_l & 0 \\ \frac{1}{2}I_l & -\frac{1}{2}I_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & I_l & 0 \\ I_l & -I_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定め, Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto gXg^{-1}$ を $\text{Ad}(g)$ と書く. この自己同型は,

$$\text{Ad}(g) \begin{pmatrix} A & B & v \\ C & D & w \\ v' & w' & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B+C+D) & \frac{1}{2}(A-B+C-D) & \frac{1}{2}(v+w) \\ \frac{1}{2}(A+B-C-D) & \frac{1}{2}(A-B-C+D) & \frac{1}{2}(v-w) \\ v'+w' & v'-w' & x \end{pmatrix}$$

で与えられる. $\mathfrak{g}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{h}$ と置くと, $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ も B_l 型の分裂単純 Lie 代数である. $\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{h}'$ や, 対応するルート系などを求めよう. Φ の g による押し出し $\Phi': \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \rightarrow \mathbb{K}$ は, 標準基底に関して行列表示

$$(g^{-1})^T \widetilde{S}_l g^{-1} = 2I_{l,l+1} = \begin{pmatrix} 2I_l & 0 \\ 0 & -2I_{l+1} \end{pmatrix}$$

をもつ対称双線型形式だから,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}' &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \Phi') \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \mid I_{l,l+1}X + X^T I_{l,l+1} = 0\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{o}(l, \mathbb{K}), D \in \mathfrak{o}(l+1, \mathbb{K}), B \in \text{Mat}(l, l+1, \mathbb{K}) \right\}\end{aligned}$$

である. この Lie 代数を, $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$ と書く. また,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}' &= \{\text{Ad}(g) \text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l, 0) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\}\end{aligned}$$

であり, 対応するルート系は

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') &= \{\pm(\epsilon'_i \pm \epsilon'_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm\epsilon'_i \mid 1 \leq i \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon'_i \in \mathfrak{h}'^* \text{ は, } \epsilon'_i \left(\begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) &= x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

であり, 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}H_{\pm(\epsilon'_i - \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} - E_{j,j} & 0 \\ E_{i,i} - E_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm(\epsilon'_i + \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} + E_{j,j} & 0 \\ E_{i,i} + E_{j,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm\epsilon'_i} &= \pm \text{Ad}(g)(E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} & 0 \\ E_{i,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & 0 \\ \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i^T & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & e_i \\ e_i^T & -e_i^T & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i} &= \mathbb{K} \text{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_i \\ e_i^T & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & -e_i \\ e_i^T & e_i^T & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である ($\mathbb{K}^l$ の標準基底を $(e_1, \dots, e_l)$ と書いた).

さらに, $\mathbb{K}$ が -1 の平方根をもつと仮定し, その一つを $\sqrt{-1}$ と書く. $h \in GL(2l+1, \mathbb{K})$ を

$$h = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_{l+1} \end{pmatrix}$$

と定め, Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto hXh^{-1}$ を $\text{Ad}(h)$ と書く. この自己同型は,

$$\text{Ad}(h) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1} B \\ -\sqrt{-1} C & D \end{pmatrix}$$

で与えられる. $\mathfrak{g}'' = \text{Ad}(h)\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'' = \text{Ad}(h)\mathfrak{h}'$ と置くと, $(\mathfrak{g}'', \mathfrak{h}'')$ も B_l 型の分裂単純 Lie 代数である. $\mathfrak{g}''$ と $\mathfrak{h}''$ を求めよう. Φ' の h による押し出し $\Phi'': \mathbb{K}^{2l+1} \times \mathbb{K}^{2l+1} \rightarrow \mathbb{K}$ は, 標準基底に関して行列表示

$$(h^{-1})^T 2I_{l,l+1} h^{-1} = 2I_{2l+1}$$

をもつ対称双線型形式だから,

$$\mathfrak{g}'' = \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l+1}, \Phi'') = \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$$

である. また,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}'' &= \left\{ \text{Ad}(h) \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \\ -\sqrt{-1} \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

である. 対応するルート系なども, 前段と同様にして求められる.

C_l ($l \geq 1$) 型の分裂単純 Lie 代数

$\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$ の部分 Lie 代数

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{sp}(l, \mathbb{K}) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid J_l X + X^T J_l = 0\} \quad (J_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}), B, C \in \text{Sym}(l, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり ([参照](#)),

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる). 対応するルート系は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l)) &= x_i \text{ で与えられる元} \end{aligned}$$

だから, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は C_l 型の分裂単純 Lie 代数である. 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned} H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm 2\epsilon_i} &= \pm(E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) \end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i,l+j}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j} + E_{j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} + E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j} + E_{l+j,i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} + E_{j,i} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{2\epsilon_i} &= \mathbb{K}E_{i,l+i} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-2\epsilon_i} &= \mathbb{K}E_{l+i,i} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,i} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

D_l ($l \geq 2$) 型の分裂 (半) 単純 Lie 代数

対称双線型形式 $\Phi: \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \rightarrow \mathbb{K}$ を, 標準基底に関して行列表示

$$S_l = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

をもつものとして定める. すると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \Phi) \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid S_l X + X^T S_l = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{K}), B, C \in \text{SkewSym}(l, \mathbb{K}) \right\} \end{aligned}$$

は半単純 Lie 代数であり ([参照](#)),

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\}$$

はその分裂化 Cartan 部分代数である (Cartan 部分代数であることは, 定理 1.35 を用いて確かめられる). 対応するルート系は

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon_i \in \mathfrak{h}^* \text{ は, } \epsilon_i(\text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l)) &= x_i \text{ で与えられる元} \end{aligned}$$

だから, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は D_l 型の分裂半単純 Lie 代数 ($l \geq 3$ ならば, 分裂単純 Lie 代数) である. 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned} H_{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})), \\ H_{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j)} &= \pm((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) \end{aligned}$$

であり, ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,j} - E_{l+j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{j,i} - E_{l+i,l+j}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{i,l+j} - E_{j,l+i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{K}(E_{l+i,j} - E_{l+j,i}) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である.

次に, D_l 型の分裂単純 Lie 代数を, 別の方法で実現する. $g \in GL(2l, \mathbb{K})$ を

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_l & \frac{1}{2}I_l \\ \frac{1}{2}I_l & -\frac{1}{2}I_l \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & I_l \\ I_l & -I_l \end{pmatrix}$$

と定め, Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto gXg^{-1}$ を $\text{Ad}(g)$ と書く. この自己同型は,

$$\text{Ad}(g) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B+C+D) & \frac{1}{2}(A-B+C-D) \\ \frac{1}{2}(A+B-C-D) & \frac{1}{2}(A-B-C+D) \end{pmatrix}$$

で与えられる. $\mathfrak{g}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' = \text{Ad}(g)\mathfrak{h}$ と置くと, $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ も D_l 型の分裂単純 Lie 代数である. $\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{h}'$ や, 対応するルート系などを求めよう. Φ の g による押し出し $\Phi': \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \rightarrow \mathbb{K}$ は, 標準基底に関して行列表示

$$(g^{-1})^T S_l g^{-1} = 2I_{l,l} = \begin{pmatrix} 2I_l & 0 \\ 0 & -2I_l \end{pmatrix}$$

をもつ対称双線型形式だから,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}' &= \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \Phi') \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid I_{l,l}X + X^T I_{l,l} = 0\}, \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \mid A, D \in \mathfrak{o}(l, \mathbb{K}), B \in \text{Mat}(l, \mathbb{K}) \right\}\end{aligned}$$

である. この Lie 代数を, $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$ と書く. また,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}' &= \{\text{Ad}(g) \text{diag}(x_1, \dots, x_l, -x_1, \dots, -x_l) \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\}\end{aligned}$$

であり, 対応するルート系は

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}') &= \{\pm(\epsilon'_i \pm \epsilon'_j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}, \\ \text{各 } \epsilon'_i \in \mathfrak{h}'^* \text{ は, } \epsilon'_i \left(\begin{pmatrix} 0 & \text{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \text{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \right) &= x_i \text{ で与えられる元}\end{aligned}$$

であり, 各ルートの双対ルートは

$$\begin{aligned}H_{\pm(\epsilon'_i - \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) - (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} - E_{j,j} \\ E_{i,i} - E_{j,j} & 0 \end{pmatrix}, \\ H_{\pm(\epsilon'_i + \epsilon'_j)} &= \pm \text{Ad}(g)((E_{i,i} - E_{l+i,l+i}) + (E_{j,j} - E_{l+j,l+j})) = \pm \begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} + E_{j,j} \\ E_{i,i} + E_{j,j} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり、ルート空間は

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \operatorname{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \operatorname{Ad}(g) \begin{pmatrix} E_{j,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,j} \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{\epsilon'_i + \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \operatorname{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} - E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}'_{-\epsilon'_i - \epsilon'_j} &= \mathbb{K} \operatorname{Ad}(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{K} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) & \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i}) \\ \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) & \frac{1}{2}(-E_{i,j} + E_{j,i}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

さらに、 $\mathbb{K}$ が -1 の平方根をもつと仮定し、その一つを $\sqrt{-1}$ と書く。 $h \in GL(2l, \mathbb{K})$ を

$$h = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_l \end{pmatrix}$$

と定め、Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K})$ の自己同型 $X \mapsto hXh^{-1}$ を $\operatorname{Ad}(h)$ と書く。この自己同型は、

$$\operatorname{Ad}(h) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sqrt{-1} B \\ -\sqrt{-1} C & D \end{pmatrix}$$

で与えられる。 $\mathfrak{g}'' = \operatorname{Ad}(h)\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'' = \operatorname{Ad}(h)\mathfrak{h}'$ と置くと、 $(\mathfrak{g}'', \mathfrak{h}'')$ も D_l 型の分裂単純 Lie 代数である。 $\mathfrak{g}''$ と $\mathfrak{h}''$ を求めよう。 $\mathcal{P}'$ の h による押し出し $\mathcal{P}'': \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} \rightarrow \mathbb{K}$ は、標準基底に関して行列表示

$$(h^{-1})^T 2I_{l,l} h^{-1} = 2I_{2l}$$

をもつ対称双線型形式だから、

$$\mathfrak{g}'' = \mathfrak{o}(\mathbb{K}^{2l}, \mathcal{P}'') = \mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$$

である。また、

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}'' &= \left\{ \operatorname{Ad}(h) \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) \\ -\sqrt{-1} \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_l \in \mathbb{K} \right\}\end{aligned}$$

である。対応するルート系なども、前段と同様にして求められる。

3.7 分裂可能単純 Lie 代数の分類

本小節では、標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 型の（同型を除いて一意に存在する）分裂可能単純 Lie 代数を、それぞれ $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$, $\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$, $\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$ と書く。

定理 3.31 (分裂可能単純 Lie 代数の分類) $\mathbb{K}$ を標数 0 の可換体とする。次に挙げる Lie 代数は、いずれも $\mathbb{K}$ 上の分裂可能単純 Lie 代数である。 $\mathbb{K}$ 上の任意の分裂可能単純 Lie 代数は、これらのいずれかに同型である。（表 1 も参照のこと。）

- $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ ($l \geq 1$)
- $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$ ($l \geq 1$)

表 1 分裂可能単純 Lie 代数の分類

型	分裂可能単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$A_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$	
$B_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K})$	
$C_l \ (l \geq 1)$	$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{K})$	
$D_l \ (l \geq 2)$	$\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K})$	
E_6	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{K})$	
E_7	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{K})$	
E_8	$\mathfrak{e}_8(\mathbb{K})$	
F_4	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{K})$	
G_2	$\mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$	

- $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{K}) \ (l \geq 1)$
- $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K}) \ (l \geq 2)$
- $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_7(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_8(\mathbb{K}), \mathfrak{f}_4(\mathbb{K}), \mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$

証明 存在定理 (定理 3.22), 同型定理 (定理 3.28), 系 3.29, 命題 3.30 より, 分裂可能単純 Lie 代数の同型類と被約な既約ルート系の同型類とは一対一に対応する. よって, 主張は, [被約な既約ルート系の分類](#)と前小節で述べた古典型分裂可能単純 Lie 代数の構成から従う. $\square$

系 3.32 (標数 0 の代数閉体上の単純 Lie 代数の分類) $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とする. 次に挙げる Lie 代数は, いずれも $\mathbb{K}$ 上の単純 Lie 代数である. $\mathbb{K}$ 上の任意の単純 Lie 代数は, これらのいずれかに同型である.

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \ (n \geq 2)$
- $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) \ (n = 3 \text{ または } \geq 5)$
- $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) \ (n \geq 1)$
- $\mathfrak{e}_6(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_7(\mathbb{K}), \mathfrak{e}_8(\mathbb{K}), \mathfrak{f}_4(\mathbb{K}), \mathfrak{g}_2(\mathbb{K})$

証明 $\mathbb{K}$ は代数閉だから, $\mathbb{K}$ 上の任意の単純 Lie 代数は分裂可能であり, 前小節で述べたように $\mathfrak{o}(l, l+1, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$ かつ $\mathfrak{o}(l, l, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$ である. よって, 主張は, 分裂可能単純 Lie 代数の分類定理 (定理 3.31) から従う. $\square$

注意 3.33 (古典型分裂可能 (半) 単純 Lie 代数の偶然同型) 低階数でのルート系の同型と同型定理 (定理 3.28) から, 古典型分裂可能 (半) 単純 Lie 代数の間の同型が得られる (表 2). これらを, **偶然同型**

表 2 古典型分裂可能 (半) 単純 Lie 代数の偶然同型

型	分裂可能 (半) 単純 Lie 代数	Dynkin 図形
$A_1 \cong B_1 \cong C_1$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(1, 2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(1, \mathbb{K})$	•
$B_2 \cong C_2$	$\mathfrak{o}(2, 3, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{K})$	• $\rightleftarrows$ •
$A_1 \oplus A_1 \cong D_2$	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(2, 2, \mathbb{K})$	• •
$A_3 \cong D_3$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(3, 3, \mathbb{K})$	• — • — •

(accidental isomorphism) という。分類定理 (定理 3.31) に挙げた分裂可能単純 Lie 代数の間の同型は、同表 (「 $A_1 \oplus A_1 \cong D_2$ 」の行を除く) に挙げたもので尽くされている。

4 分裂簡約 Lie 代数の表現

4.1 $\mathfrak{g}$ 加群のウェイト

定義 4.1 (ウェイト) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, V を $\mathfrak{g}$ 加群とする. $\mathfrak{h}$ の V への作用の同時固有値 (これは, $\mathfrak{h}$ から $\mathbb{K}$ への写像である), 同時固有ベクトル, 同時固有空間を, それぞれ, V の ($\mathfrak{h}$ に関する) **ウェイト** (weight), **ウェイトベクトル** (weight vector), **ウェイト空間** (weight space) という. $\mathfrak{h}$ の V の作用における同時固有値 $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ の重複度を, V におけるウェイト λ の **重複度** (multiplicity) という.

定義 4.1 の状況で, V におけるウェイト $\lambda \in \mathbb{K}^{\mathfrak{h}}$ のウェイト空間を, V_{λ} と書く. すなわち,

$$V_{\lambda} = \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } hv = \lambda(h)v\}$$

と書く. 明らかに, $V_{\lambda} \neq 0$ となりうるのは $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ のときだけである. 同時固有空間に関する一般論より, 和 $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_{\lambda}$ は直和である.

注意 4.2 定義 4.1 において, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ (その標準基底を (H, X, Y) と書く), $\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$ とし, 線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ を $\mathbb{K}$ と同一視したものが, 定義 2.1 にほかならない.

定義 4.3 (ウェイト加群) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ 加群 V は, それが ($\mathfrak{h}$ に関する) ウェイト空間の直和に分解される (すなわち, $\mathfrak{h}$ の V への作用が同時対角化可能である) とき, ($\mathfrak{h}$ に関する) **ウェイト加群** (weight module) であるという.

命題 4.4 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. V を $\mathfrak{g}$ 加群とすると, 任意の $\alpha, \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ が成り立つ.

証明 $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $v \in V_{\lambda}$ とすると, 任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$h xv = [h, x]v + xhv = \alpha(h)xv + \lambda(h)xv$$

だから, $xv \in V_{\lambda+\alpha}$ である. よって, $\mathfrak{g}_{\alpha} V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda+\alpha}$ である. □

命題 4.5 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. $f: V \rightarrow W$ を $\mathfrak{g}$ 加群の間の $\mathfrak{g}$ 準同型とすると, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $f(V_\lambda) \subseteq W_\lambda$ が成り立つ.

証明 $v \in V_\lambda$ とすると, 任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$hf(v) = f(hv) = \lambda(h)f(v)$$

だから, $f(v) \in W_\lambda$ である. よって, $f(V_\lambda) \subseteq W_\lambda$ である. □

4.2 最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群

定義 4.6 (極大ベクトル) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底, Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ と置く. $\mathfrak{g}$ 加群 V の ($\mathfrak{h}$ に関する) ウェイトベクトル $e \neq 0$ であって $\mathfrak{n}_+ e = 0$ を満たすものを, V の ($\mathfrak{h}$ と Π に関する) **極大ベクトル** (maximal vector) という. V の極大ベクトルであって V を $\mathfrak{g}$ 加群として生成するものを, V の ($\mathfrak{h}$ と Π に関する) **極大生成ベクトル** (maximal generating vector) という.

定義 4.7 (最高ウェイト加群) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\mathfrak{g}$ 加群 V が ($\mathfrak{h}$ と Π に関する) ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトルをもつとき, V は ($\mathfrak{h}$ と Π に関する) **最高ウェイト λ の最高ウェイト加群** (highest weight module of highest weight λ) であるという.

注意 4.8 定義 4.6 と定義 4.7 において, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ (その標準基底を (H, X, Y) と書く), $\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$, $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$ とし, 線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ を $\mathbb{K}$ と同一視したものが, 定義 2.5 と定義 2.6 にほかならない.

命題 4.9 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\mathfrak{g}$ 加群 V のウェイトベクトル $e \neq 0$ が極大ベクトルであるための必要十分条件は, 任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha v = 0$ であることである.

証明 Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ と置くと, $\bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{n}_+$ を Lie 代数として生成する (系 3.17 (1)). よって, 主張が成り立つ. □

命題 4.10 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ と置く. V をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群とする.

- (1) $V = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e$ が成り立つ.
- (2) V の任意のウェイトは $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ に属し, その重複度はすべて有限である. また, ウェイト λ の重複度は 1 である.
- (3) V はウェイト加群である.

証明 (1) e は V を $\mathfrak{g}$ 加群として生成し, **Poincaré–Birkhoff–Witt の定理**^{*6} より $\mathbf{U}(\mathfrak{g}) = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$ だ

^{*6} 脚注 ^{*5} を参照のこと.

から, $V = \mathbf{U}(\mathfrak{g})e = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)e = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e$ である.

(2), (3) Π に関する正ルートを重複なく列挙して $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ とし, 各 $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}$ を一つずつ固定する. すると, [Poincaré–Birkhoff–Witt の定理^{*7}](#) より $y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}$ ($q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}$) の全体は $\mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)$ をベクトル空間として生成するから, (1) と合わせて

$$V = \mathbf{U}(\mathfrak{n}_-)e = \text{span}_{\mathbb{K}}\{y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}e \mid q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}\}$$

を得る. ここで, 各 $y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}e$ は, ウェイト $\lambda - \sum_{i=1}^k q_i \alpha_i$ のウェイトベクトルである (命題 4.4). よって, V の任意のウェイトは $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ に属し, V はウェイト加群である. また, 任意の $\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ に対して, $\lambda - \sum_{i=1}^k q_i \alpha_i = \mu$ を満たす $(q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{N}^k$ はたかだか有限個であり, $\mu = \lambda$ のときはこのような組は $(0, \dots, 0)$ のみである. よって, V の任意のウェイトの重複度は有限であり, ウェイト λ の重複度は 1 である. $\square$

系 4.11 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. 最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群 V の最高ウェイトは一意に定まり, V の極大生成ベクトルはスカラー倍を除いて一意である.

証明 命題 4.10 (2) から従う. $\square$

注意 4.12 系 4.11 の状況で, V は, 極大生成ベクトル以外の極大ベクトルをもちうる. たとえば, 2.2 節で定義した $M(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) は最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群であり, その極大生成ベクトルはスカラー倍を除いて e_0 のみだが, $\lambda \in \mathbb{N}$ のとき, $e_{\lambda+1}$ は $M(\lambda)$ のウェイト $-\lambda - 2$ の極大ベクトルである.

系 4.13 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. 最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群 V から自身への $\mathfrak{g}$ 準同型は, 恒等写像 id_V のスカラー倍のみである.

証明 V がウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトル e をもつとする. $f: V \rightarrow V$ を $\mathfrak{g}$ 準同型とすると, $f(e) \in f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda = \mathbb{K}e$ だから (命題 4.5, 命題 4.10 (2)), ある $c \in \mathbb{K}$ が存在して $f(e) = ce$ となる. e は V を $\mathfrak{g}$ 加群として生成するから, これより, $f = \text{cid}_V$ である. $\square$

系 4.14 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. V を最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群とする.

- (1) 各 $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ は, V に $\lambda(z)$ 倍写像として作用する.
- (2) V は直既約^{*8} である.
- (3) さらに, V が有限次元であるとする. このとき, V は既約である.

証明 (1) $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の V への作用は, $\mathfrak{g}$ 準同型だから, 系 4.13 よりスカラー倍である. 一方で, $e \in V$ をウェイト λ の極大生成ベクトルとすると, $ze = \lambda(z)e$ である. よって, z は, V に $\lambda(z)$ 倍写像として作用する.

(2) 明らかに, $V \neq 0$ である. $V = V' \oplus V''$ を直和分解とすると, 対応する射影 $p: V \rightarrow V'$ は $\mathfrak{g}$ 準同型だから, 系 4.13 より $p = \text{cid}_V$ ($c \in \mathbb{K}$) と書ける. $c \neq 0$ ならば $V' = p(V) = V$ であり, $c = 0$ ならば $V' = p(V) = 0$ である. よって, V は直既約である.

^{*7} 脚注 ^{*5} を参照のこと.

^{*8} $\mathfrak{g}$ 加群 V が直既約 (indecomposable) であるとは, $V \neq 0$ であり, かつ V が二つの 0 でない部分加群の直和として書けないことをいう.

(3) Weyl の完全可約性定理より, V の $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 加群としての既約分解 $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ がとれる. 各 V_i は $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 安定だが, (1) より $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ 安定でもあるから, $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ は $\mathfrak{g}$ 加群としての既約分解でもある. (2) より V は直既約だから, I は 1 元集合であり, V は既約である. $\square$

系 4.15 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. V をウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の極大生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群とし, W をその真部分加群とする. このとき, $W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi, \lambda \neq \mu} V_\mu$ であり, V/W はウェイト λ の極大生成ベクトル $e + W$ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群である.

証明 直和分解 $V = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi} V_\mu$ が成り立ち (命題 4.10 (2), (3)), W は $\mathfrak{h}$ 安定だから, 同時固有空間に関する一般論より,

$$W = \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi} (V_\mu \cap W)$$

が成り立つ. V_λ は 1 次元 (命題 4.10 (2)) だから $V_\lambda \cap W$ は 0 または V_λ だが, 後者の場合 $e \in V_\lambda \subseteq W$ となり, e が V を $\mathfrak{g}$ 加群として生成することと W が V の真部分加群であることに反する. よって, $V_\lambda \cap W = 0$ であり, 上記の直和分解と合わせて $W \subseteq \bigoplus_{\mu \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \Pi, \lambda \neq \mu} V_\mu$ を得る. また, これより $e + W \neq 0$ だから, $e + W$ は V/W のウェイト λ の極大生成ベクトルである. $\square$

4.3 Verma 加群

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と置く. このとき, $\mathfrak{h}$ が可換であること (定理 1.35) と命題 3.6 (1) より $[\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+] \subseteq \mathfrak{n}_+$ だから, 1 次元 $\mathfrak{b}_+$ 加群 $\mathbb{K}v_\lambda$ を,

$$(h + x)v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad (h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{n}_+)$$

によって定義できる. このことを踏まえて, 次のように定義する.

定義 4.16 (Verma 加群) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と置く. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, 上記の 1 次元 $\mathfrak{b}_+$ 加群 $\mathbb{K}v_\lambda$ を用いて, **Verma 加群** (Verma module) $M(\lambda)$ を

$$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda$$

と定める (ここで, $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を自然に右 $\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$ 加群とみなしている). また,

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda)$$

と定める.

命題 4.17 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする.

- (1) Verma 加群 $M(\lambda)$ は, ウェイト λ の極大生成ベクトル e_λ をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群である.
- (2) V をウェイト λ の極大ベクトル e をもつ $\mathfrak{g}$ 加群とする. このとき, $\mathfrak{g}$ 準同型 $\phi: M(\lambda) \rightarrow V$ であって e_λ を e に移すものが, 一意に存在する.

証明 Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き, $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と置く.

(1) 任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して, $he_\lambda = h \otimes v_\lambda = 1 \otimes hv_\lambda = \lambda(h)e_\lambda$ である. 任意の $x \in \mathfrak{n}_+$ に対して, $xe_\lambda = x \otimes v_\lambda = 1 \otimes xv_\lambda = 0$ である. 明らかに, e_λ は $M(\lambda)$ を $\mathfrak{g}$ 加群として生成する. 以上より, e_λ は $M(\lambda)$ のウェイト λ の極大生成ベクトルである.

(2) e が V のウェイト λ の極大ベクトルであることを用いて容易に確かめられるように, $(u, v_\lambda) \in \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{K}v_\lambda$ を $ue \in V$ に移す双線形写像は, $\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)$ 均衡である. よって, テンソル積の普遍性より, 線型写像 $\phi: M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda \rightarrow V$ であって各 $u \otimes v_\lambda$ を ue に移すものが, 一意に存在する. この ϕ が, 条件を満たす一意な $\mathfrak{g}$ 準同型である. $\square$

定理 4.18 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする.

- (1) Verma 加群 $M(\lambda)$ の真部分加群 N に対して商加群 $M(\lambda)/N$ を与える対応は, $M(\lambda)$ の真部分加群と最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群の同型類との間の一対一対応である.
- (2) Verma 加群 $M(\lambda)$ は, 最大真部分加群 $N(\lambda)$ をもつ. これに対応する最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群 $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$ は既約であり, その他の真部分加群 N に対応する最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群 $M(\lambda)/N$ は無限次元かつ可約である.

証明 (1) 系 4.15 より, $M(\lambda)$ の真部分加群 N に対して, $M(\lambda)/N$ は最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群である.

最高ウェイト λ の最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群が, 同型を除いて $M(\lambda)$ の真部分加群による商で尽くされることを示す. V をウェイト λ の極大生成ベクトル e をもつ最高ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群とすると, Verma 加群の普遍性 (命題 4.17 (1)) より, $\mathfrak{g}$ 準同型 $\phi: M(\lambda) \rightarrow V$ であって e_λ を e に移すものが一意に存在する. e は V を $\mathfrak{g}$ 加群として生成するから, この ϕ は全射であり, したがって, $\mathfrak{g}$ 同型 $M(\lambda)/\text{Ker } \phi \cong V$ を誘導する. $V \neq 0$ だから, $\text{Ker } \phi$ は $M(\lambda)$ の真部分加群である.

N と N' が $M(\lambda)$ の真部分加群であり, $\mathfrak{g}$ 同型 $\psi: M(\lambda)/N \rightarrow M(\lambda)/N'$ が存在するとして, $N = N'$ を示す. $\pi: M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)/N$ と $\pi': M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)/N'$ を等化準同型とすると, $\psi(\pi(e))$ と $\pi'(e)$ はともに $M(\lambda)/N'$ の極大生成ベクトルだから (系 4.15), ある $c \in \mathbb{K}^\times$ が存在して $\psi(\pi(e)) = c\pi'(e)$ が成り立つ (系 4.11). Verma 加群の普遍性 (命題 4.17 (2)) と合わせて, $\psi \circ \pi = c\pi'$ を得る. よって,

$$N' = \text{Ker}(\psi \circ \pi) = \text{Ker } \pi' = N'$$

が成り立つ.

(2) 系 4.15 より, $M(\lambda)$ のすべての真部分加群の和はまたは真部分加群であり, これが $M(\lambda)$ の最大真部分加群 $N(\lambda)$ となる. $M(\lambda)$ の真部分加群 N に対して, $M(\lambda)/N$ が既約であることは, N が $M(\lambda)$ の真部分加群の中で極大であることと同値だが, $M(\lambda)$ は最大真部分加群 $N(\lambda)$ をもつから, この条件を満たすものは $N = N(\lambda)$ のみである. また, $M(\lambda)/N$ が有限次元であるとする, $M(\lambda)/N$ は既約だから (系 4.14 (3)), $N = N(\lambda)$ となる. これで, すべての主張が示された. $\square$

定義 4.19 (Verma 加群の既約商) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, Verma 加群 $M(\lambda)$ をその最大真部分加群 $N(\lambda)$ で割って得られる最高ウェイト既約 $\mathfrak{g}$ 加群 $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$ (定理 4.18) を, **Verma 加群の既約商** (irreducible quotient of the Verma module) という. $M(\lambda)$ から $L(\lambda)$ への等化準同型による $e_\lambda \in M(\lambda)$ の像を, そのまま $e_\lambda \in L(\lambda)$

と書く.

注意 4.20 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とすると, $\mathfrak{h}$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の分裂化 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ と $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の直和として書ける (注意 3.4). Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底, Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書き,

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}'_{\alpha|_{\mathfrak{h}'}} , \quad \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \mathfrak{b}'_+ = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}_+$$

と置く. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ として $\lambda' = \lambda|_{\mathfrak{h}'} \in (\mathfrak{h}')^*$ と置き, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ のそれぞれの上の Verma 加群

$$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{K}v_\lambda, \quad M(\lambda') = \mathbf{U}(\mathfrak{g}') \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b}'_+)} \mathbb{K}v_{\lambda'}$$

とその極大生成ベクトル

$$e_\lambda = 1 \otimes v_\lambda \in M(\lambda), \quad e_{\lambda'} = 1 \otimes v_{\lambda'} \in M(\lambda')$$

を考える.

$M(\lambda)$ を $\mathfrak{g}'$ 加群とみなすと, e_λ はウェイト λ' の極大生成ベクトルだから, $M(\lambda')$ の普遍性 (命題 4.17 (2)) より, $\mathfrak{g}'$ 準同型 $\phi: M(\lambda') \rightarrow M(\lambda)$ であって $e_{\lambda'}$ を e_λ に移すものが (一意に) 存在する. また, 任意の $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に対して z の $M(\lambda')$ への作用を $\lambda(z)$ 倍写像と定めることで $M(\lambda')$ は $\mathfrak{g}$ 加群をなし, $e_{\lambda'}$ はウェイト λ の極大生成ベクトルとなるから, $M(\lambda)$ の普遍性 (命題 4.17 (2)) より, $\mathfrak{g}$ 準同型 $\psi: M(\lambda) \rightarrow M(\lambda')$ であって e_λ を $e_{\lambda'}$ に移すものが (一意に) 存在する. さらに, Verma 加群の普遍性から誘導される準同型の一意性 (命題 4.17 (2)) を用いて確かめられるように, ϕ と ψ は互いに他の逆である. 以上より, $M(\lambda)$ は, $M(\lambda')$ に上記の方法で $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の作用を定めて得られる $\mathfrak{g}$ 加群に同型である.

$\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の各元は $M(\lambda)$ にスカラー倍によって作用するから, 前段の同型を通して, $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$ 加群と $M(\lambda')$ の部分 $\mathfrak{g}'$ 加群は一対一に対応する. よって, 前段の同型によって $M(\lambda)$ と $M(\lambda')$ を同一視するとき, $N(\lambda) = N(\lambda')$ かつ $L(\lambda) = L(\lambda')$ である.

注意 4.21 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ (その標準基底を (H, X, Y) と書く), $\mathfrak{h} = \mathbb{K}H$, $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{K}X$ とし, 線型同型写像 $\lambda \mapsto \lambda(H)$ によって $\mathfrak{h}^*$ を $\mathbb{K}$ と同一視する. 最高ウェイト $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の分類 (定理 2.8) と定理 4.18 を比較すれば, 2.2 節で定義した $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ が, Verma 加群とその既約商に同型であることが確かめられる.

4.4 整ベクトルと優整ベクトルに関する補足

Δ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V 上の被約ルート系とし, Π をその基底とすると, $\lambda \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } \Delta \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意のルート } \alpha \in \Delta \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}, \\ \lambda \text{ が } (\Delta, \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

と定義するのだった (参照).

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ 上の被約ルート系であり, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の双対ルート $\alpha^\vee$ は $\alpha^\vee(\lambda) = \lambda(H_\alpha)$

($\lambda \in V$) (H_α は定理 3.10 によって定まるものとする) によって与えられる (定理 3.13). したがって, $\lambda \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{任意のルート } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \\ \lambda \text{ が } (\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{任意の単純ルート } \alpha \in \Pi \text{ に対して } \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

である.

前段の状況で, 「整ベクトル」と「優整ベクトル」の定義を拡張して, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対してもこれらの用語を用いることにする. すなわち, 上記の同値性が $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対しても成り立つとすることで, 「 λ が $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである」ことと「 λ が $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルである」ことを定義する. $Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0\}$ と置き, 直和分解 $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$ に関する射影を $\text{pr}_V: \mathfrak{h}^* \rightarrow V$ と書くと,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル} &\iff \text{pr}_V(\lambda) \text{ が } \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ に関する整ベクトル,} \\ \lambda \text{ が } (\Delta, \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} &\iff \text{pr}_V(\lambda) \text{ が } (\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi) \text{ に関する優整ベクトル} \end{aligned}$$

である.

この拡張された定義に関して, 次が成り立つ. この命題は, 定理 4.29 の証明で用いられる.

命題 4.22 ($\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$) を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする. $\mathfrak{h}^*$ の部分集合 $\mathfrak{X}$ が, 次の条件を満たすとする.

- (i) ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が存在して, $\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ となる.
- (ii) $\mathfrak{X}$ は $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ 安定である.

このとき, $\mathfrak{X}$ は有限である.

証明 $V = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathbf{Z}(\mathfrak{g})} = 0\}$ および $Z = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha|_{\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0\}$ と置き, 直和分解 $\mathfrak{h}^* = V \oplus Z$ に関する射影を $\text{pr}_V: \mathfrak{h}^* \rightarrow V$ および $\text{pr}_Z: \mathfrak{h}^* \rightarrow Z$ と書く. $\Pi \subseteq V$ だから, 条件 (i) より, $\text{pr}_Z(\mathfrak{X}) \subseteq \{\text{pr}_Z(\lambda)\}$ である. また, $\text{pr}_V(\mathfrak{X})$ は, $\text{pr}_V(\lambda) - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ に含まれ $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ 安定だから, 有限である (参照). よって, $\mathfrak{X}$ は有限である. $\square$

4.5 条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群

定義 4.23 (条件 (CD) を満たす $\mathfrak{g}$ 加群) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする. $\mathfrak{g}$ 加群 V が**条件 (CD) を満たす**^{*9} とは, $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の元の V への作用が対角化可能であることをいう.

注意 4.24 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が $\mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ を満たす (これは, $\mathfrak{g}$ が半単純ならば成り立つ) ならば, 明らかに, 任意の $\mathfrak{g}$ 加群は条件 (CD) を満たす.

命題 4.25 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし, V を既約 $\mathfrak{g}$ 加群とする. 任意の $z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) z の V への作用はスカラー倍である.
- (b) z の V への作用は対角化可能である.

^{*9} 「条件 (CD) を満たす」は, 本稿だけの用語である. “center” と “diagonalizable” の頭文字をとって “(CD)” とした.

(c) z の V への作用は固有値をもつ。

特に、 $\mathbb{K}$ が代数閉ならば、任意の有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群は条件 (CD) を満たす。

証明 (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) 明らかである。

(c) $\implies$ (a) z の V への作用を $\rho(z)$ と書く。 $\rho(z)$ が固有値 $c \in \mathbb{K}$ をもつとすると、 $\rho(z) - \text{id}_V$ は V から自身への単射でない $\mathfrak{g}$ 準同型だから、 $\text{Ker}(\rho(z) - \text{id}_V)$ は V の 0 でない部分加群である。 V は既約だから、 $\text{Ker}(\rho(z) - \text{id}_V) = V$ である。 すなわち、 $\rho(z) = \text{id}_V$ が成り立つ。

最後の主張 $\mathbb{K}$ が代数閉であるとする、有限次元ベクトル空間 $V \neq 0$ 上の線型変換は必ず固有値をもつ。 よって、主張は、すでに示した同値性から従う。 $\square$

命題 4.26 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする。 V を有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群とする。

- (1) V の任意のウェイトは、 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである。
- (2) V が条件 (CD) を満たすとする。 このとき、 V は完全可約なウェイト加群である。
- (3) V が条件 (CD) を満たすとし、 Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする。 このとき、 $V \neq 0$ ならば V は極大ベクトルをもち、 V が既約ならば V は最高ウェイト加群である。

証明 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、 $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる。

(1) V がウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ のウェイトベクトル $v \neq 0$ をもつとする。 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし、 $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす。 すると、 $Hv = H_\alpha v = \lambda(H_\alpha)v$ だから、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V はウェイト $\lambda(H_\alpha)$ をもつ。 したがって、系 2.13 (1) より、 $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ である。 これが任意のルート $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して成り立つから、 λ は $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する整ベクトルである。

(2) V が完全可約であることを示す。 $\omega \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})^*$ に対して

$$V_{(\omega)} = \{v \in V \mid \text{任意の } z \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) \text{ に対して } zv = \omega(z)v\}$$

と置くと、仮定より、直和分解 $V = \bigoplus_{\omega \in \mathbf{Z}(\mathfrak{g})^*} V_{(\omega)}$ が成立する。 さらに、 $\mathfrak{g}$ の任意の元の作用と $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の元の作用が可換であることから確かめられるように、各 $V_{(\omega)}$ は V の部分加群である。 Weyl の完全可約性定理より、各 $V_{(\omega)}$ は $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 加群として完全可約だが、一方で、 $V_{(\omega)}$ の任意の部分ベクトル空間は $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ 安定だから、 $V_{(\omega)}$ は $\mathfrak{g}$ 加群としても完全可約である。 よって、 $\mathfrak{g}$ 加群 V は完全可約である。

V がウェイト加群であることを示す。 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし、 $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす。 すると、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V はウェイト加群だから (系 2.13 (1)), H_α の V への作用は対角化可能である。 また、仮定より、 $\mathbf{Z}(\mathfrak{g})$ の任意の元の V への作用は対角化可能である。 ここで、

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g}) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\} \oplus \mathbf{Z}(\mathfrak{g})$$

であり (注意 3.4, 系 3.14), $\mathfrak{h}$ は可換だから (定理 1.35), $\mathfrak{h}$ の V への作用は同時対角化可能である。 すなわち、 $\mathfrak{g}$ 加群 V はウェイト加群である。

(3) $V \neq 0$ であるとする。 V は有限次元だからそのウェイトは有限個であり、一方で、(2) より V は少なくとも一つのウェイトをもつ。 そこで、 Π に関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書くと、 V のウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ であって $\lambda + \Delta_+$ が V のウェイトを含まないものがとれる。 $e \in V_\lambda \setminus \{0\}$ をとると、任意の $\alpha \in \Delta_+$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha e \in V_{\lambda+\alpha} = 0$ だから (命題 4.4), e は極大ベクトルである。 さらに、 V が既約ならば、 e は V を $\mathfrak{g}$ 加群として生成するから、 e は極大生成ベクトルである。 $\square$

命題 4.27 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. V_1 と V_2 は条件 (CD) を満たす有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群であり, 任意のウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の V_1 における重複度と V_2 における重複度が等しいとする. このとき, V_1 と V_2 は $\mathfrak{g}$ 同型である.

証明 V_1 と V_2 はウェイト加群だから (命題 4.26 (2)), 仮定より, V_1 と V_2 の次元は等しい. この共通の次元に関する帰納法で, 主張を示す. $\dim V_1 = \dim V_2 = 0$ である場合には, 主張は明らかである. $\dim V_1 = \dim V_2 \geq 1$ であるとして, 次元がより小さい場合には主張が成り立つとする. V_1 と V_2 は有限次元だから, そのウェイトは有限個である. そこで, ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底 Π を一つ固定し, それに関する正ルート全体のなす集合を Δ_+ と書くと, V_1 と V_2 のウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ であって $\lambda + \Delta_+$ が V_1 と V_2 のウェイトを含まないものがとれる. 各 $i \in \{1, 2\}$ に対してウェイトベクトル $e_i \in V_i \setminus \{0\}$ をとると, λ のとり方より, これは極大ベクトルである. そこで, e_i が生成する部分加群を $W_i \subseteq V_i$ と置くと, W_i は最高ウェイト λ の有限次元最高ウェイト加群だから, $L(\lambda)$ に同型である (定理 4.18 (2)). V_i は完全可約だから (命題 4.26 (2)), 部分加群 $V'_i \subseteq V_i$ であって W_i の補空間であるものがとれる. V'_1 と V'_2 はふたたび主張の仮定を満たすから, 帰納法の仮定より, これらは $\mathfrak{g}$ 同型である. よって, $V_1 = L(\lambda) \oplus V'_1$ と $V_2 = L(\lambda) \oplus V'_2$ も $\mathfrak{g}$ 同型である. これで, 帰納法が完成した. $\square$

4.6 最高ウェイト理論

補題 4.28 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする. V を $\mathfrak{g}$ 加群とし, $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を対応する表現とする. $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし, $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとり, V 上の線型写像 $\rho(X_\alpha)$ と $\rho(Y_\alpha)$ は局所冪零であるとする. このとき,

$$\theta_\alpha^\rho = e^{\rho(X_\alpha)} e^{\rho(-Y_\alpha)} e^{\rho(X_\alpha)} \in GL(V)$$

と定めると, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\theta_\alpha^\rho(V_\lambda) = V_{s_\alpha(\lambda)}$ が成り立つ.

証明 $a, x \in \mathfrak{g}$ とし, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(a)$ は冪零であり, $\rho(a)$ は局所冪零であるとする. すると, 任意の $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(e^{\text{ad}(a)}(x))v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ad}(\rho(a))^n \rho(x)v \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} \rho(a)^p \rho(x) (-\rho(a))^q v \\ &= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} \rho(a)^p \rho(x) (-\rho(a))^q v \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \rho(a)^p \rho(x) e^{-\rho(a)} v \\ &= e^{\rho(a)} \rho(x) e^{-\rho(a)} v \end{aligned}$$

だから (どの総和も有限項を除いて 0 になることに注意する),

$$\rho(e^{\text{ad}(a)}(x)) = e^{\rho(a)} \rho(x) e^{-\rho(a)}$$

が成り立つ. したがって, $\text{ad}(X_\alpha)$ と $\text{ad}(Y_\alpha)$ が冪零であること (系 3.7) に注意して $\theta_\alpha = e^{\text{ad}(X_\alpha)} e^{\text{ad}(-Y_\alpha)} e^{\text{ad}(X_\alpha)} \in$

$\text{Aut}(\mathfrak{g})$ と定めると、任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\rho(\theta_\alpha(x)) = \theta_\alpha^\rho \rho(x) (\theta_\alpha^\rho)^{-1} \quad (*)$$

が成り立つ。

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする。(*) より、

$$\begin{aligned} \theta_\alpha^\rho(V_\lambda) &= \{v \in V \mid (\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) \in V_\lambda\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) = \lambda(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v)\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \theta_\alpha^\rho \rho(h)(\theta_\alpha^\rho)^{-1}(v) = \lambda(h)v\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(\theta_\alpha(h))v = \lambda(h)v\} \end{aligned}$$

である。ここで、補題 3.12 (1), (2) より、 θ_α は $\mathfrak{h}$ を安定にし、 $(\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}})^{-1} = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$ を満たす。よって、上式と合わせて、

$$\begin{aligned} \theta_\alpha^\rho(V_\lambda) &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)v = \lambda(\theta_\alpha^{-1}(h))v\} \\ &= \{v \in V \mid \text{任意の } h \in \mathfrak{h} \text{ に対して } \rho(h)v = s_\alpha(\lambda)(h)v\} \\ &= V_{s_\alpha(\lambda)} \end{aligned}$$

を得る。 □

定理 4.29 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし、 Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して、次の条件は同値である。

- (a) λ は $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルである。
- (b) 任意の $\alpha \in \Pi$ に対して、 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ のすべての元の $L(\lambda)$ への作用は局所冪零である。
- (c) $L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合は、 $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ 安定である。
- (d) $L(\lambda)$ は有限次元である。

さらに、これらの条件の下で、 $L(\lambda)$ におけるウェイトの重複度は、 $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ の作用の各軌道上で一定である。

証明 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して、 $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ を定理 3.10 のようにとる。

(a) $\implies$ (b) λ が $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルであるとする。 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし、 $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって $L(\lambda)$ を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす。 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の標準基底を (H, X, Y) と書くとき、 Y の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $L(\lambda)$ への作用が局所冪零であることを示したい。 Y は $\mathbb{K}^2$ 上の線型写像として冪零だから、その任意の有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群への作用も冪零である (参照)。したがって、 $L(\lambda)$ のすべての有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の和が $L(\lambda)$ 全体となることを示せばよい。

W を $L(\lambda)$ の有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とすると、任意の $x \in \text{span}_{\mathbb{K}}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$ に対して

$$x\mathfrak{g}W \subseteq \mathfrak{g}xW + [x, \mathfrak{g}]W \subseteq \mathfrak{g}W$$

だから、 $\mathfrak{g}W$ も $L(\lambda)$ の有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群である。したがって、 $L(\lambda)$ のすべての有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群の和は、 $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$ 加群である。 $L(\lambda)$ は既約 $\mathfrak{g}$ 加群だから、あとは、 $L(\lambda)$ 有限次元部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群であって 0 でないことを示せばよい。

e_λ が生成する $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群が有限次元であることを示そう. $m = \lambda(H_\alpha)$ と置くと, 仮定より, $m \in \mathbb{N}$ である. e_λ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 $L(\lambda)$ のウェイト m の極大ベクトルだから, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$e_{\lambda, n} = \frac{1}{n!} Y_\alpha^n e_\lambda$$

と置くと, e_λ が生成する $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は $\text{span}_{\mathbb{K}}\{e_{\lambda, n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ である (命題 2.7 (2), (3)). ここで, $e_{\lambda, m+1}$ に注目すると, 命題 2.7 (1) より

$$X_\alpha e_{\lambda, m+1} = (m - (m+1) + 1)e_{\lambda, m} = 0$$

である. また, $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ とすると, $[X_\beta, Y_\alpha] = 0$ であり (命題 3.26 (4)), e_λ は $\mathfrak{g}$ 加群 $L(\lambda)$ の極大ベクトルだから,

$$X_\beta e_{\lambda, m+1} = \frac{1}{(m+1)!} X_\beta Y_\alpha^{m+1} e_\lambda = \frac{1}{(m+1)!} Y_\alpha^{m+1} X_\beta e_\lambda = 0$$

である. もし $e_{\lambda, m+1} \neq 0$ ならば, 上式より $e_{\lambda, m+1}$ は $\mathfrak{g}$ 加群 $L(\lambda)$ の極大ベクトルであり (命題 4.9), $L(\lambda)$ は既約 $\mathfrak{g}$ 加群だから, これは自動的に極大生成ベクトルとなる. ところが, $e_{\lambda, m+1}$ のウェイトは $\lambda - (m+1)\alpha$ だから (命題 4.4), これは, 最高ウェイトの一意性 (系 4.11) に矛盾する. よって, 背理法より $e_{\lambda, m+1} = 0$ であり, e_λ が生成する $L(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群は有限次元である. これで, 主張が示された.

(b) $\implies$ (c), 最後の主張 条件 (b) が成り立つとすると, 各 $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対して $\theta_\alpha^\rho \in GL(V)$ を補題 4.28 のとおりに定義でき, これは任意の $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\theta_\alpha^\rho(V_\mu) = V_{s_\alpha(\mu)}$ を満たす. よって, 任意の $w \in \mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $L(\lambda)$ におけるウェイト λ と $w(\lambda)$ の重複度は等しい. 特に, $L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合は, $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ 安定である.

(c) $\implies$ (d) $L(\lambda)$ のウェイト全体のなす集合を $\mathfrak{X}$ と置くと, $\mathfrak{X} \subseteq \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$ である (命題 4.10 (2)). さらに, $\mathfrak{X}$ が $\mathbf{W}(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ 安定であるとする, $\mathfrak{X}$ は命題 4.22 の仮定を満たすから, 有限である. $L(\lambda)$ はウェイト加群であり, その各ウェイトの重複度は有限だから (命題 4.10 (2), (3)), このとき, $L(\lambda)$ は有限次元である.

(d) $\implies$ (a) $\alpha \in \Pi$ とし, $\mathfrak{sl}_2$ 三対 $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ によって V を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とみなす. すると, $He_\lambda = H_\alpha e_\lambda = \lambda(H_\alpha)v$ かつ $Xe_\lambda = X_\alpha e_\lambda = 0$ だから, e_λ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V のウェイト $\lambda(H_\alpha)$ の極大ベクトルである. したがって, 系 2.9 より, $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ である. これが任意の単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して成り立つから, λ は $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルである. $\square$

定理 4.30 (最高ウェイト理論) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とし, Π をルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の基底とする.

- (1) 条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群 V は, 最高ウェイト加群であり, その最高ウェイトは, $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルである.
- (2) $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトル $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, Verma 加群の既約商 $L(\lambda)$ は, 条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群である.
- (3) (1) と (2) の対応は, 条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群の同型類と $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルとの間の, 互いに他の逆を与える一対一対応である.

証明 主張は, 次のことから従う.

- 条件 (CD) を満たす有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群は, 最高ウェイト加群である (命題 4.26).

- 最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の最高ウェイト既約 $\mathfrak{g}$ 加群は, 同型を除いて $L(\lambda)$ のみである (定理 4.18).
- $L(\lambda)$ が有限次元であるための必要十分条件は, λ が $(\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \Pi)$ に関する優整ベクトルであることである (定理 4.29). □

注意 4.31 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を標数 0 の可換体 $\mathbb{K}$ 上の分裂簡約 Lie 代数とする.

- (1) 注意 4.24 と命題 4.25 より, $\mathbb{K}$ が代数閉であるかまたは $\mathfrak{g}$ が半単純ならば, 最高ウェイト理論 (定理 4.30) において, 「条件 (CD) を満たす」はなくても同じである.
- (2) $\mathbb{K}$ が代数閉でなく $\mathfrak{g}$ が半単純でなければ, 条件 (CD) を満たさない有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群が存在しうる. たとえば, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし, $\mathfrak{g}$ を 1 次元可換 Lie 代数 $\mathbb{R}$ とすると, 写像 $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ 上の既約表現だが, 条件 (CD) を満たさない.
- (3) $\mathfrak{g}$ が半単純でなければ, ($\mathbb{K}$ が代数閉であっても,) 条件 (CD) を満たさない有限次元 $\mathfrak{g}$ 加群が存在する. 実際, $\lambda \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ であって $\lambda|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} = 0$ を満たすものを一つ固定すると, 写像 $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \lambda(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{K}^2$ 上の表現だが, 条件 (CD) を満たさない.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7*, Springer, 2006.
- [3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8*, Springer, 2006.